

# Teorema de separación de Jordan-Brouwer

por

Fernando Alcalde Cuesta, Universidade de Santiago de Compostela<sup>1</sup>

## 1. Introducción

Si consideramos la circunferencia  $\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\}$ , resulta claro que su complementario  $\mathbb{R}^2 - \mathbb{S}^1$  es la unión disjunta de dos abiertos conexos  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < 1\}$  y  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 > 1\}$  con frontera común  $\partial A = \partial B = \mathbb{S}^1$ . Diremos que *la circunferencia separa el plano en dos componentes conexas*. La componente acotada se llama *interior de  $\mathbb{S}^1$*  y la no acotada *exterior de  $\mathbb{S}^1$* . Aunque en este caso basta emplear la ecuación de la circunferencia para saber si un punto  $p$  de  $\mathbb{R}^2 - \mathbb{S}^1$  está en el interior ó en el exterior, también podemos utilizar el siguiente método: damos orientaciones positivas al plano y a la circunferencia, fijamos una semirrecta transversa a la circunferencia que una el punto  $p$  con el punto del infinito y calculamos el *número de intersección algebraica* de la semirrecta y la circunferencia, es decir, por cada punto de intersección, sumamos un 1 ó un  $-1$  según que la orientación determinada por la semirrecta y la circunferencia sea positiva ó negativa. Supongamos que las orientaciones elegidas son iguales y coinciden con la orientación contraria a las agujas del reloj. Si el número de

---

<sup>1</sup>Con la colaboración de Miguel Anxo Bermúdez Carro, Université Claude Bernard Lyon

intersección algebraica es igual a 1, el punto está en el interior; si es 0, en el exterior (véase la figura 1). El cambio de una de las orientaciones se traduce en un cambio de signo en el número de intersección algebraica.

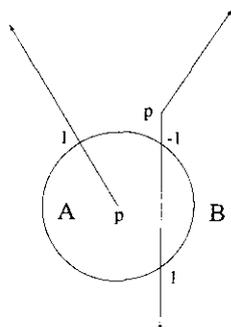


Figura 1

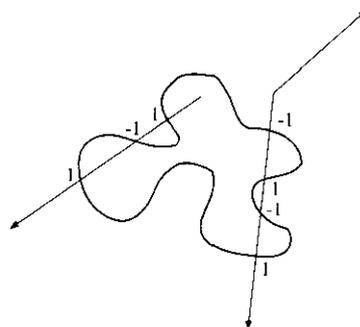


Figura 2

Si sustituimos  $S^1$  por un subespacio  $C$  de  $\mathbb{R}^2$  homeomorfo a  $S^1$ , la afirmación anterior resulta menos evidente (como se observa en la figura 3 que además podríamos complicar indefinidamente). Suponiendo que  $C$  separa  $\mathbb{R}^2$  en dos componentes conexas, el mismo procedimiento de antes nos permite saber si un punto de  $\mathbb{R}^2 - C$  está en el interior o en el exterior (véase la figura 2). Ahora bien, el problema no está ahí, sino en la existencia misma de un interior y un exterior.

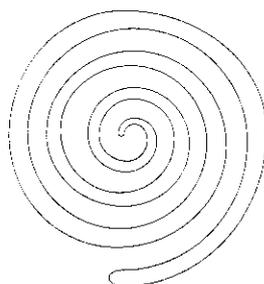
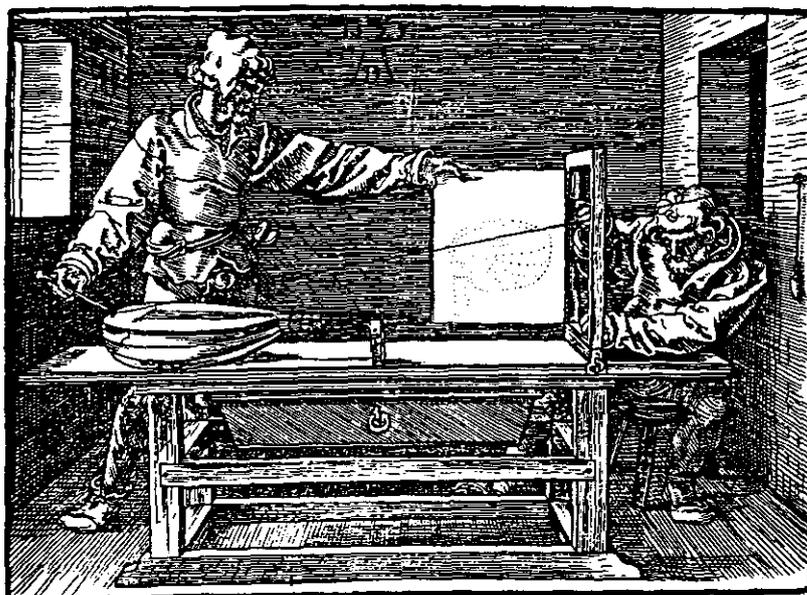


Figura 3

Un subespacio  $C$  de  $\mathbb{R}^2$  homeomorfo a  $S^1$  es la imagen de una curva continua  $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , cerrada (i.e. los extremos  $c(0)$  y  $c(1)$  coinciden) y simple (i.e.  $c$  es inyectiva). Identificando la curva cerrada y simple  $c$  con su imagen  $C$ , diremos que  $C$  es una *curva de Jordan*. La solución a la cuestión planteada viene dada por el *teorema de separación de Jordan*, que se suele atribuir a C. Jordan como introductor de la noción que lleva su nombre y como autor del *Cours d'Analyse de l'École*

# **Un paseo por la Geometría y la Topología**



**Curso 1999/2000**

**Departamento de Matemáticas**



*Polytechnique*, en cuya tercera edición de 1905 apareció publicado este resultado (véase [J]). Añadiremos el nombre de A. Schönflies, quien también publicó el mismo resultado en 1908 (véase [Sch]), ya que, aunque todas las demostraciones de la época son incompletas, la solución actual del problema se basa en sus ideas.

**Teorema de separación de Jordan** (Jordan, 1905; Schönflies, 1908) *Una curva de Jordan  $C$  separa el plano  $\mathbb{R}^2$  en dos componentes conexas con frontera común  $C$ , i.e.  $\mathbb{R}^2 - C = A \cup B$  donde  $A$  y  $B$  son dos abiertos conexos tales que  $\partial A = \partial B = C$ .*

De hecho, si se quiere estudiar la separación del plano por una curva de Jordan, resulta mucho más cómodo sustituirlo por la “compactificación” que se obtiene al añadirle el punto del infinito y que se identifica con la esfera  $\mathbb{S}^2$  (véase la figura 4). Se denomina *curva de Jordan* a la imagen  $C$  de una aplicación  $c : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^2$  continua e inyectiva. Se trata pues de un subespacio de  $\mathbb{S}^2$  homeomorfo a  $\mathbb{S}^1$ .

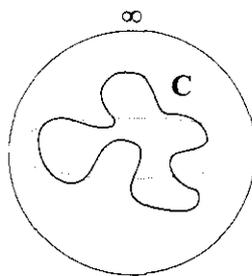


Figura 4

En esta situación, podemos precisar la naturaleza de las componentes conexas:

**Teorema de Schönflies** (Schönflies, 1908) *Una curva de Jordan  $C$  separa la esfera  $\mathbb{S}^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$  en dos componentes conexas  $A$  y  $B$  con frontera común  $C$ . Además las regiones  $\bar{A}$  y  $\bar{B}$  son homeomorfas al disco  $\mathbb{D}^2$  mediante homeomorfismos que envían  $C = \partial A = \partial B$  sobre  $\mathbb{S}^1 = \partial \mathbb{D}^2$ .*

En 1912, L. E. J. Brouwer publica una nueva demostración del teorema de separación de Jordan (véase [Brou]). Se trata de una demostración válida para cualquier *n*-esfera topológica  $\Sigma$  contenida en  $\mathbb{R}^{n+1}$ , i.e. la imagen  $\Sigma$  de una aplicación continua e inyectiva  $\sigma : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ :

**Teorema de separación de Jordan-Brouwer** (Brouwer, 1912) *Una n-esfera topológica  $\Sigma$  separa  $\mathbb{R}^{n+1}$  en dos componentes conexas con frontera común  $\Sigma$ .*

Las pruebas elementales del teorema de separación de Jordan son tediosas y no suelen ser habituales en la literatura. Sin embargo, no es difícil encontrar demostraciones del teorema de Jordan-Brouwer en la mayoría de los libros de Topología Algebraica: el esquema de la prueba es idéntico al de Brouwer, pero resulta imprescindible utilizar técnicas homológicas en un punto importante, que en su momento pareció evidente a Brouwer. En el caso de dimensión 2, no es necesario emplear estas técnicas, pero hay que recurrir al grupo fundamental, otro invariante topológico de carácter algebraico, para simplificar la demostración.

Nuestro propósito es dar a conocer una prueba elemental de E. Lima del teorema de separación de Jordan en el caso diferenciable (véase [L]). De hecho, tal y como veremos, se trata de la prueba de un resultado más general, conocido desde hace tiempo. También mostraremos cómo usar la idea central de Lima para obtener un nuevo resultado de separación en el caso topológico.

El resultado de Brouwer conlleva una cuestión natural: sabemos que una curva de Jordan  $C \subset S^2$  bordea dos regiones compactas homeomorfas al disco  $D^2$  y resulta natural preguntarnos si una  $n$ -esfera topológica  $\Sigma \subset S^{n+1}$  también bordea dos regiones compactas homeomorfas al disco  $D^n$ . En un trabajo publicado en 1922, J. W. Alexander enunció una generalización del teorema de Schönflies en este sentido (véase [A1]). Sin embargo, dos años más tarde, publicó un contraejemplo, que hoy se conoce como *esfera con cuernos de Alexander* (véase [A2]): se trata de una 2-esfera topológica  $\Sigma$  contenida en  $\mathbb{R}^3$  (representada en la figura 5) que bordea una región compacta homeomorfa al disco  $D^3$ , pero cuyo complementario en  $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$  no es homeomorfo al disco.

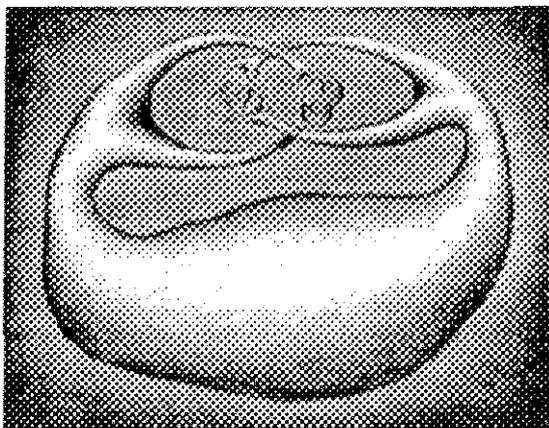


Figura 5

Para terminar, describiremos el ejemplo de Alexander, indicaremos qué dificultad ilustra este ejemplo y enunciaremos una generalización del teorema de Schönflies obtenida por B. Mazur, M. Brown y M. Morse.

## 2. Hipersuperficies

Si pensamos en una superficie regular  $S \subset \mathbb{R}^3$ , pero en lugar de utilizar dos parámetros reales, usamos un número arbitrario  $n$  de tales parámetros, obtenemos la noción de *hipersuperficie regular*  $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , que siempre supondremos conexa. La esfera

$$S^n = \{ x \in \mathbb{R}^n / \|x\|^2 = x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1 \}$$

y el elipsoide

$$M = \{ x \in \mathbb{R}^n / \frac{x_1^2}{a_1^2} + \dots + \frac{x_{n+1}^2}{a_{n+1}^2} = 1 \}$$

son dos ejemplos de hipersuperficies compactas, difeomorfas entre sí. Por el teorema de Jordan-Brouwer, sabemos que ambas separan  $\mathbb{R}^{n+1}$  en dos componentes conexas. Surge una nueva pregunta: ¿cualquier hipersuperficie compacta tiene esta propiedad? La respuesta es una consecuencia del siguiente resultado de E. Lima (véase [L]):

**Teorema 1** *Si  $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$  es una hipersuperficie regular compacta, existe una función diferenciable  $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $M = f^{-1}(0)$  y en cada punto  $x \in M$  el gradiente  $(\nabla f)(x) \neq 0$ .*

Se trata de un resultado conocido desde los inicios de la geometría diferencial moderna. El interés de la demostración de E. Lima está en su simplicidad, basada en una idea ingeniosa a la que intentaremos sacar partido. Precisaremos esta prueba más adelante. Por ahora, nos contentaremos con mostrar dos consecuencias del teorema. En primer lugar, puesto que el gradiente  $\nabla f$  es un campo de vectores normal a  $M$  que no se anula en ningún punto de  $M$ , tendremos el siguiente resultado:

**Corolario 2** *Cualquier hipersuperficie regular compacta es orientable.* ■

La respuesta a la pregunta que acabamos de plantear requerirá una prueba más detallada:

**Teorema de separación de Jordan-Brouwer-Wilder 1** (Wilder, 1949) *Cualquier hipersuperficie regular compacta  $M$  separa  $\mathbb{R}^{n+1}$  en dos componentes conexas con frontera común  $M$ .*

**Demostración** Como consecuencia del teorema 1, el complementario  $\mathbb{R}^{n+1} - M = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} / f(x) \neq 0\}$  es unión disjunta de los abiertos  $A = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} / f(x) > 0\}$  y  $B = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} / f(x) < 0\}$ . Para probar que  $M$  separa  $\mathbb{R}^{n+1}$  en dos componentes conexas, nos bastará comprobar que  $A$  y  $B$  son conexas. Observemos que  $A$  contiene un subconjunto conexo  $P = \{x + t(\nabla f)(x) / x \in M, 0 < t \leq 2\varepsilon\}$ , siendo  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño. Si un punto  $y$  de  $A$  no pertenece a  $P$ , entonces el punto  $p$  de  $P$  que minimiza la distancia de  $y$  a  $P$  verifica que el segmento  $\overline{py}$  está contenido en  $A$  (véase la figura 6). Luego  $A$  es la unión de una familia de conexos  $P \cup \overline{py}$  con intersección no vacía. De idéntica manera, se prueba que  $B$  es conexo. Por otra parte, la continuidad de  $f$  garantiza que  $\partial A$  y  $\partial B$  están contenidos en  $M$ , ya que sus imágenes por  $f$  son idénticamente nulas. Puesto que cualquier entorno de un punto  $x$  de  $M$  contiene puntos de  $A$  y  $B$ , la hipersuperficie  $M$  está contenida en  $\partial A$  y  $\partial B$ . Luego  $M$  es la frontera común de  $\partial A$  y  $\partial B$ . ■

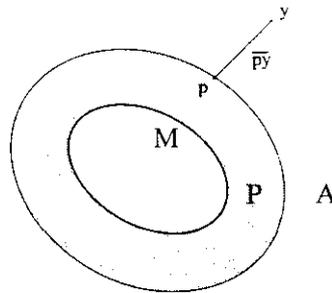


Figura 6

La denominación que hemos dado a este corolario se debe a que se trata de un caso particular de un resultado mucho más general de R. L. Wilder (véase [W]). En primer lugar, aunque la condición de regularidad es esencial en el enunciado y la prueba del teorema de Lima, el teorema de separación sigue siendo cierto si las parametrizaciones locales de  $M$  son sólo continuas:

**Teorema de separación de Jordan-Brouwer-Wilder 2** (Wilder, 1949) *Cualquier  $n$ -variedad topológica compacta  $M$  embebida en  $\mathbb{R}^{n+1}$  separa  $\mathbb{R}^{n+1}$  en dos componentes conexas con frontera común  $M$ .*

De hecho, el resultado de Wilder está formulado en el contexto más general de las *variedades topológicas generalizadas* y es válido para lo que hoy conocemos como *variedades de homología*.

### 3. Prueba elemental de Lima

Nuestro propósito inmediato es probar el teorema de Lima. Comenzaremos por recordar la siguiente definición de [L]:

**Definición 3** Sea  $X$  un espacio topológico. Se dice que dos funciones  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  coinciden localmente salvo el signo si para cada punto  $x$  de  $X$ , existe un entorno  $V$  de  $x$  tal que tal que  $f(y) = g(y)$  para cada punto  $y$  de  $V$ , ó bien  $f(y) = -g(y)$  para cada punto  $y$  de  $V$ . En tal caso, escribiremos simplemente  $f|_V = \pm g|_V$ .

La demostración del teorema se basa en dos resultados previos:

**Lema 4** Sea  $X$  un espacio topológico conexo. Si dos funciones  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  coinciden localmente salvo el signo y  $f^{-1}(0)$  tiene interior vacío, entonces las funciones  $f$  y  $g$  coinciden salvo el signo, es decir,  $f = g$  ó  $f = -g$ .

**Demostración** Consideremos el conjunto  $E_+ = \{x \in X / f(x) = g(x)\}$  y veamos que su interior  $U = \overset{\circ}{E}_+$  es cerrado. Cada punto  $x$  adherente a  $U$  posee un entorno  $V$  tal que  $f|_V = g|_V$  ó  $f|_V = -g|_V$ . Puesto que  $f^{-1}(0)$  tiene interior vacío,  $V$  debe cortar a  $U$  en un punto  $y$  tal que  $f(y) = g(y) \neq 0$ . Luego  $f|_V = g|_V$  y  $x$  pertenece a  $U$ . La conexión de  $X$  garantiza que  $U = \overset{\circ}{E}_+ = \emptyset$  ó  $U = E_+ = X$ , es decir,  $E_+$  se reduce a  $f^{-1}(0)$  ó las funciones  $f$  y  $g$  son iguales. Sustituyendo  $g$  por  $-g$  en la definición del conjunto  $E_+$ , se prueba de la misma manera que  $E_- = \{x \in X / f(x) = -g(x)\}$  tiene interior vacío ó coincide con  $X$ . Esto significa de nuevo que  $E_-$  se reduce a  $f^{-1}(0)$  ó las funciones  $f$  y  $-g$  son iguales. Ahora bien, los interiores de  $E_+$  y  $E_-$  no pueden ser simultáneamente vacíos, ya que  $X = E_+ \cup E_-$ . ■

**Lema 5** Sean  $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$  un recubrimiento abierto de  $\mathbb{R}^{n+1}$  y  $\{f_i\}_{i \in I}$  una familia de funciones diferenciables  $f_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}$  tales que  $f_i^{-1}(0)$  tiene interior vacío y las restricciones de  $f_i$  y  $f_j$  a  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$  coinciden localmente salvo el signo. Entonces existe una función diferenciable  $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f|_{U_i}$  y  $f_i$  coinciden localmente salvo el signo. Si los abiertos  $U_i$  son conexos, entonces  $f|_{U_i} = \pm f_i$  para cada  $i \in I$ .

**Demostración** Sea  $\overline{ox}$  el segmento que une el origen  $o$  con un punto  $x$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Por compacidad, este segmento está contenido en la unión  $U$  de una cadena finita de bolas  $B_0, B_1, \dots, B_m$  contenidas en abiertos  $U_{i_0}, U_{i_1}, \dots, U_{i_m}$  de  $\mathcal{U}$  tal que  $B_j \cap B_{j+1} \neq \emptyset$  para cada  $j = 0, 1, \dots, m-1$ , pero  $B_j \cap B_k = \emptyset$  si  $k > j+1$ . La aplicación diferenciable  $f_0 = f_{i_0}|_{B_0} : B_0 \rightarrow \mathbb{R}$  se extiende en una aplicación diferenciable  $f_1 : B_0 \cup B_1 \rightarrow \mathbb{R}$  si se impone la condición  $f_1|_{B_1} = \pm f_{i_1}|_{B_1}$  eligiendo el mismo

signo que en la igualdad  $f_{i_1}|_{U_{i_0} \cap U_{i_1}} = \pm f_{i_0}|_{U_{i_0} \cap U_{i_1}}$ . Por recurrencia, se construye una aplicación diferenciable  $f_m : U = B_0 \cup B_1 \cup \dots \cup B_m \rightarrow \mathbb{R}$ . Sea  $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  la aplicación definida por  $f(x) = f_m(x) = \pm f_{i_m}(x)$ . Esta definición sólo depende de la elección de  $f_0$ . En efecto, cualquier otro recubrimiento de  $\overline{\partial x}$  por bolas  $B'_0, \dots, B'_r$  determina otra función diferenciable  $g_r : U' = B'_0 \cup B'_1 \cup \dots \cup B'_r \rightarrow \mathbb{R}$ . Ahora bien, puesto que  $U \cap U'$  es conexo y las funciones  $f_m$  y  $g_r$  coinciden localmente salvo el signo, se tiene que  $f_m = \pm g_r$  sobre  $U \cap U'$ . Si las funciones  $f_0$  y  $g_0$  son iguales, las funciones  $f_m$  y  $g_r$  lo serán también. Luego  $f(x) = f_m(x) = g_r(x)$ . Para probar que la función  $f$  es diferenciable en  $x$ , supondremos que la distancia de  $\overline{\partial x}$  a la frontera de  $U$  es igual a  $2\varepsilon > 0$ . Para cada punto  $y$  de la bola  $B(x, \varepsilon)$  de centro  $x$  y radio  $\varepsilon$ , el segmento  $\overline{\partial y}$  está contenido en la unión  $U'' \subset U$  de una cadena finita de bolas  $B''_0, B''_1, \dots, B''_s$ . De nuevo, como consecuencia del lema 4, la función  $h_s : U'' = B''_0 \cup B''_1 \cup \dots \cup B''_s \rightarrow \mathbb{R}$  coincide con la restricción  $f_m$  a  $U''$  eligiendo convenientemente la función  $h_0$ . Luego  $f(y) = h_s(y) = f_m(y)$  para cada punto  $y \in B(x, \varepsilon)$ . Así pues,  $f$  es diferenciable en  $x$ . Por construcción, las funciones  $f|_{U_i}$  y  $f_i$  coinciden localmente salvo el signo. Si  $U_i$  es conexo, ambas coinciden salvo el signo, según el lema 4. ■

**Demostración del Teorema de Lima** La unión de las bolas abiertas (resp. cerradas) centradas en puntos de  $M$  y de radio  $\varepsilon > 0$  es un *entorno tubular abierto* (resp. *cerrado*)  $V_\varepsilon(M)$  (resp.  $V_\varepsilon[M]$ ) de  $M$ . Consideremos el complementario  $U^*$  del entorno tubular cerrado  $V_\varepsilon[M]$  y descompongamos el entorno tubular abierto  $V_{2\varepsilon}(M)$  en unión de abiertos  $U_i = \{x + tX_i(x) / x \in O_i, |t| < 2\varepsilon\}$  determinados por un recubrimiento de  $M$  por abiertos coordenados  $O_i$  y una familia de campos de vectores  $X_i$  unitarios y normales a  $O_i$  (véase la figura 8). Estos abiertos forman un recubrimiento abierto de  $\mathbb{R}^{n+1}$  al que aplicaremos el lema 5. Sean  $f^* : U^* \rightarrow \mathbb{R}$  y  $f_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}$  las funciones diferenciables definidas por

$$\begin{aligned} f^*(y) &= \varepsilon && \text{para cada punto } y \in U^*, \\ f_i(y) &= \lambda(t) && \text{para cada punto } y = x + tX_i(x) \in U_i, \end{aligned}$$

donde  $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función diferenciable tal que  $\lambda(-t) = -\lambda(t)$ ,  $\lambda(0) = 0$ ,  $\lambda'(0) = 1$ ,  $\lambda'(t) > 0$  si  $0 \leq t < \varepsilon$  y  $\lambda(t) = \varepsilon$  si  $t \geq \varepsilon$ . Resulta fácil comprobar que estas funciones satisfacen las condiciones del lema 5. Luego existe una aplicación diferenciable  $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f|_{U_i} = \pm f_i$ . Esto garantiza que la hipersuperficie  $M = f^{-1}(0)$  y el gradiente  $(\nabla f)(x) = \pm \lambda'(0)X_i(x) = \pm X_i(x)$  para cada  $x \in O_i$ . ■

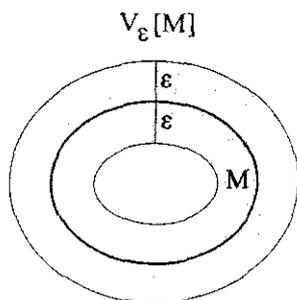


Figura 7

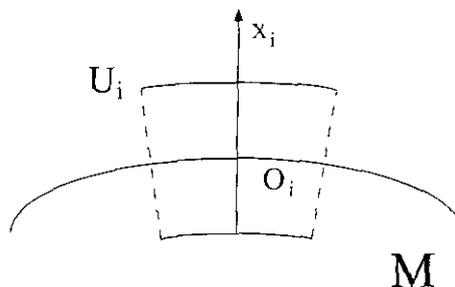


Figura 8

#### 4. Criterio de separación

El teorema de separación de Jordan-Brouwer-Wilder muestra que cualquier hipersuperficie compacta  $M$  separa  $\mathbb{R}^{n+1}$  en dos componentes conexas. Diremos que  $\mathbb{R}^{n+1}$  es *2-separado* por  $M$ . De hecho, la prueba del teorema 1 muestra que  $\mathbb{R}^{n+1}$  es *localmente 2-separado* por  $M$ , i.e. para cada punto  $x$  de  $M$  y para cada entorno  $U$  de  $x$ , existe un entorno conexo  $V \subset U$  de  $x$  tal que  $V \cap M$  separa  $V$  en dos componentes conexas. En esta situación, podemos definir una función sobreyectiva  $\mathcal{O}_V : V \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ , nula sobre  $V \cap M$  y localmente constante sobre  $V - M$ , que llamaremos una *orientación de  $V$  relativa a  $M$* . Observemos que la aplicación  $\mathcal{O}_V$  es constante sobre cada componente conexa de  $V - M$ , pero en ningún caso es continua. Sean  $V$  y  $W$  dos abiertos conexos 2-separados por  $M$ , dotados de orientaciones  $\mathcal{O}_V$  y  $\mathcal{O}_W$  relativas a  $M$ . Las funciones  $\mathcal{O}_V$  y  $\mathcal{O}_W$  son localmente coincidentes salvo el signo, pero necesitamos que sean coincidentes salvo el signo si queremos extenderlas a  $V \cup W$ . Si la intersección  $V \cap W$  es conexa, tendremos efectivamente que  $\mathcal{O}_V = \pm \mathcal{O}_W$  según el lema 4. Para obtener una orientación de  $V \cup W$  relativa a  $M$ , en el peor de los casos, nos bastará cambiar el signo de la orientación de  $W$  relativa a  $M$  (véase la figura 9).

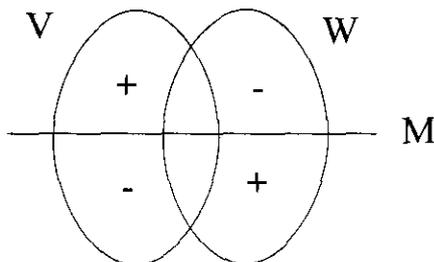


Figura 9

Recordemos que las bolas abiertas usadas en el lema 5 tienen precisamente esta propiedad. No obstante, si consideramos un espacio topológico arbitrario, esta condición es difícil de garantizar. Ahora bien, sólo pretendemos evitar la situación descrita en la figura 10. Podremos hacerlo si suponemos que la unión  $V \cup W$  está contenida en un abierto conexo 2-separado por  $M$ .

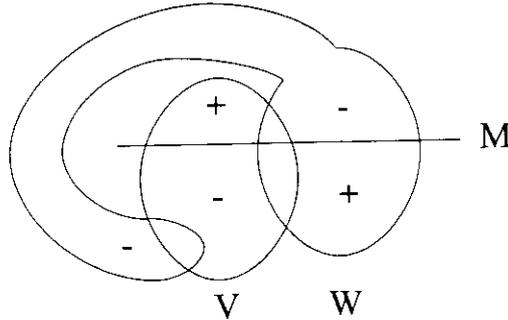


Figura 10

Sea  $X$  un espacio topológico conexo y localmente conexo. Diremos que  $X$  es un *buen* espacio si cada recubrimiento abierto  $\mathcal{U}$  admite un *buen* refinamiento abierto  $\mathcal{V}$  verificando la siguiente condición: para cada par de abiertos  $V$  y  $W$  de  $\mathcal{V}$  tales que  $V \cap W \neq \emptyset$ , existe un abierto  $U$  de  $\mathcal{U}$  tal que  $V \cup W \subset U$ . Los espacios métricos constituyen un ejemplo de buenos espacios.

Si un buen espacio  $X$  es localmente 2-separado por un subespacio cerrado  $M$ , cada recubrimiento  $\mathcal{U}$  por abiertos conexos 2-separados por  $M$  admite un buen refinamiento  $\mathcal{V}$  por abiertos conexos 2-separados por  $M$ . A cada abierto  $V$  de  $\mathcal{V}$ , le asociamos una orientación  $\mathcal{O}_V$  relativa a  $M$ . De esta manera, obtenemos una familia de orientaciones relativas  $\mathcal{O}_\mathcal{V} = \{\mathcal{O}_V\}_{V \in \mathcal{V}}$  que denominaremos una *orientación de  $\mathcal{V}$  relativa a  $M$* . Denotemos  $\mathfrak{D}_\mathcal{V} = \delta\mathcal{O}_\mathcal{V}$  la familia de aplicaciones constantes

$$(\delta\mathcal{O})_{V \cap W} : V \cap W \rightarrow \mathbb{Z}_2 = \{-1, 1\}$$

que extienden trivialmente las aplicaciones constantes definidas por:

$$(\delta\mathcal{O})_{V \cap W}(x) = \mathcal{O}_V(x)\mathcal{O}_W(x)^{-1}$$

para cada punto  $x \in V \cap W - M$ . Diremos que  $\mathfrak{D}_\mathcal{V} = \delta\mathcal{O}_\mathcal{V}$  es un 1-cociclo de Čech con valores en  $\mathbb{Z}_2$ . En otros términos, la información combinatoria relativa a la 2-separación del espacio  $X$  por el subespacio  $M$  se traduce en este objeto algebraico  $\mathfrak{D}_\mathcal{V} = \delta\mathcal{O}_\mathcal{V} \in Z^1(\mathcal{V}, \mathbb{Z}_2)$  que depende de la elección de la orientación.

Si lo suponemos trivial, es decir,  $(\delta\mathcal{O})_{V \cap W} = 1$  para cada par de abiertos  $V$  y  $W$  tales que  $V \cap W \neq \emptyset$ , tendremos que las aplicaciones  $\mathcal{O}_V : V \rightarrow \{-1, 0, 1\}$  se pegan en una aplicación  $\mathcal{O}_X : X \rightarrow \{-1, 0, 1\}$  nula sobre  $M$ , localmente constante sobre  $X - M$  y sobreyectiva. Luego  $X - M$  no es conexo. Argumentos similares a los usados en la prueba del teorema de separación de Jordan-Brouwer-Wilder 1, muestran que  $X - M$  tiene exactamente dos componentes conexas. No obstante, la condición de trivialidad de  $\mathfrak{D}_V = \delta\mathcal{O}_V$  es demasiado fuerte. Nuestro cociclo representa un elemento del primer grupo  $H^1(\mathcal{V}, \mathbb{Z}_2)$  de *cohomología de Čech de  $\mathcal{V}$  con valores en  $\mathbb{Z}_2$* , que no depende de la elección de la orientación  $\mathcal{O}_V$ , sino sólo del recubrimiento  $\mathcal{V}$ . Si consideramos todos los refinamientos 2-separados  $\mathcal{V}$  de  $\mathcal{U}$ , estas clases de cohomología determinan un único elemento  $\mathfrak{D}_M$  del primer grupo  $\check{H}^1(X, \mathbb{Z}_2)$  de *cohomología de Čech de  $X$  con valores en  $\mathbb{Z}_2$* , que está canónicamente asociado al subespacio  $M$  de  $X$ . Diremos que  $\mathfrak{D}_M \in \check{H}^1(X, \mathbb{Z}_2)$  es la *obstrucción a la 2-separación de  $X$  por  $M$* . Estos requisitos algebraicos permiten formular un criterio de separación en el contexto topológico:

**Teorema 6** (Bermúdez Carro, 2000) *Sea  $X$  un buen espacio, conexo y localmente conexo, localmente 2-separado por un subespacio cerrado  $M$ . Entonces  $M$  separa  $X$  en dos componentes conexas con frontera común  $M$  si y sólo si la obstrucción  $\mathfrak{D}_M \in \check{H}^1(X, \mathbb{Z}_2)$  es nula.*

Los teoremas de separación de Jordan-Brouwer-Wilder son corolarios de este resultado, que sigue siendo válido para espacios topológicos más generales (como la unión de dos esferas por un punto descrita en la figura 11). Ahora bien, mientras que las hipersuperficies y las variedades topológicas embebidas en  $\mathbb{R}^{n+1}$  son siempre localmente 2-separadoras, esta condición es esencial en otros casos (como se puede comprobar en la figura 11)

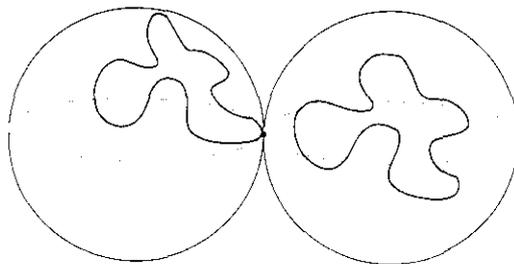


Figura 11

## 5. Esferas salvajes

Por último, nos proponemos describir la esfera con cuernos de Alexander e indicar bajo qué condiciones sigue siendo válido el teorema de Schönflies en dimensiones superiores. La *esfera con cuernos de Alexander* es la 2-esfera topológica  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$  descrita en la figura 12.

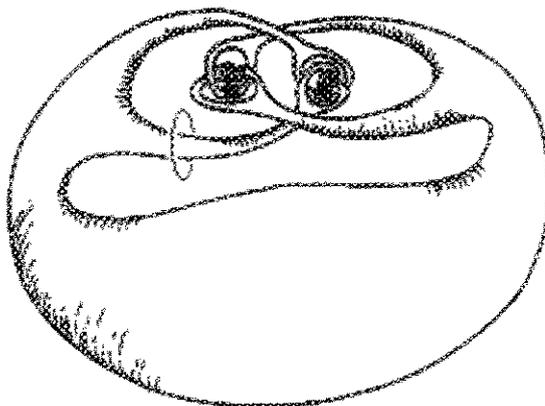


Figura 12

Si eliminamos el interior de un disco, obtenemos un disco topológico  $\Delta \subset \mathbb{R}^3$  de dimensión 2, llamado *disco con cuernos de Alexander*. Nos bastará describir este espacio. Consideremos dos discos cerrados  $\mathbb{D}_1$  y  $\mathbb{D}_2$  contenidos en el disco  $\mathbb{D}^2$  y eliminemos sus interiores: tenemos una superficie con borde (que aparece sombreada en la figura 13), llamada *pantalón*. Si repetimos el proceso para los discos  $\mathbb{D}_1$  y  $\mathbb{D}_2$ , obtenemos una nueva superficie con borde. También podemos obtenerla pegando un nuevo pantalón a cada una de los dos "perneras" del primer pantalón. Iterando una infinidad de veces este proceso, conseguimos eliminar un conjunto de Cantor del disco  $\mathbb{D}^2$  (véase la figura 13). Para recuperar el disco inicial, nos bastará añadir el conjunto de Cantor que acabamos de eliminar.

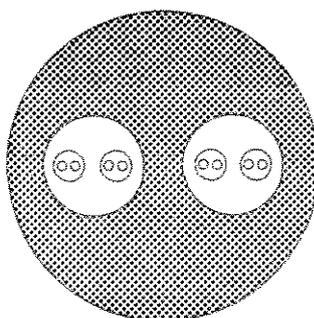


Figura 13

Por analogía con los primeros pasos, la superficie no compacta que acabamos de construir es el resultado de pegar una infinidad de pantalones. La figura 14 sugiere una denominación para esta superficie: la llamaremos un *árbol de Cantor*.

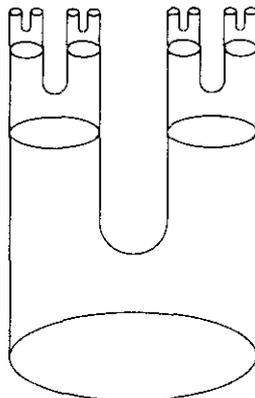


Figura 14

Una vez construido el árbol de Cantor, enlazamos sus ramas (ó si se quiere, las “perneras” de cada par de pantalones) según nos indica la figura 12. A continuación, lo “compactificamos” añadiendo una infinidad no numerable de puntos de  $\mathbb{R}^3$ . Puesto que hemos añadido una copia del conjunto de Cantor que habíamos eliminado de  $\mathbb{D}^2$ , obtenemos un subespacio  $\Delta$  de  $\mathbb{R}^3$  homeomorfo a  $\mathbb{D}^2$ . Se trata precisamente del disco con cuernos de Alexander.

Por el teorema de Jordan-Brouwer, la esfera con cuernos de Alexander  $\Sigma$  separa  $\mathbb{R}^3$  en dos componentes conexas. Sustituyendo el disco  $\mathbb{D}^2$  por un semidisco de dimensión 3 y eliminando sucesivamente pares de semidiscos, podemos comprobar que  $\Sigma$  bordea una región de  $\mathbb{R}^3$  homeomorfa al disco  $\mathbb{D}^3$ . Sin embargo, su complementario en  $\mathbb{S}^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$  no es homeomorfo al disco  $\mathbb{D}^3$ . Si lo fuese, cualquier curva de Jordan podría deformarse en un punto de manera continua. Pero es imposible deformar la curva de Jordan que aparece en la figura 12. Peor aún, cualquier bola centrada en alguno de los puntos que hemos añadido para “compactificar” el árbol de Cantor contiene una pequeña curva de Jordan, imposible de deformar en un punto fuera de  $\Sigma$ , ya que enlaza una rama de  $\Sigma$ . Recordemos que este fenómeno es imposible en las hipersuperficies regulares. La razón se debe a que cualquier hipersuperficie regular satisface la siguiente condición:

**Definición 7** Una  $n$ -variedad topológica  $M$  embebida en  $\mathbb{R}^{n+1}$  ó  $\mathbb{S}^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1} \cup \{\infty\}$  es *localmente plana* en un punto  $x$  si existe un entorno  $U$  de  $x$  en  $\mathbb{R}^{n+1}$  y un homeomorfismo  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  tal que  $\varphi(U \cap M) = \mathbb{R}^n \times \{0\}$ . En caso contrario, se dice que  $x$  es un *punto salvaje* de  $M$ .

La esfera con cuernos de Alexander es un ejemplo de esfera salvaje. De manera precisa,  $\Sigma$  contiene un conjunto de Cantor de puntos salvajes. El análogo de dimensión 2 del arco de Fox-Artin (descrito en la figura 15) es una esfera topológica con dos puntos salvajes.



Figura 15

La noción de  $n$ -subvariedad topológica localmente plana es la versión topológica de la noción de hipersuperficie regular. En esta situación, no nos puede sorprender que el teorema de Schönflies siga siendo válido en cualquier dimensión:

**Teorema de Schönflies** (Mazur, 1959; Brown, 1960; Morse, 1960) *Una  $n$ -esfera topológica localmente plana  $\Sigma \subset \mathbb{S}^{n+1}$  separa  $\mathbb{S}^{n+1}$  en dos componentes conexas  $A$  y  $B$  con frontera común  $\Sigma$ , cuyas clausuras  $\bar{A}$  y  $\bar{B}$  son homeomorfas al disco  $\mathbb{D}^{n+1}$  mediante homeomorfismos que envían  $\Sigma = \partial A = \partial B$  en  $\mathbb{S}^n = \partial \mathbb{D}^{n+1}$ .*

### Bibliografía recomendada

- [Ar] M. A. Armstrong, *Topología básica*, Reverté, 1987.
- [Mu] J. R. Munkres, *Elements of Algebraic Topology*, Addison-Wesley, 1984.
- [Ro] D. Rolfsen, *Knots and Links*, Publish or Perish, 1976.
- [Ru] T. B. Rushing, *Topological Embeddings*, Academic Press, 1973.

### Bibliografía

[A1] J. W. Alexander, *A proof and extension of the Jordan-Brouwer separation theorem*, Transactions of the American Mathematical Society 23, 333-349, 1922.

[A2] J. W. Alexander, *An example of simply connected surface bounding a region which is not simply connected*, Proceedings of the National Academy of Sciences 10, 8-10, 1924.

[Ber] M. A. Bermúdez Carro, *Un teorema de separación de Jordan-Brouwer na categoría dos espacios topolóxicos*, Tesina de Licenciatura, Santiago de Compostela, 2000.

[Brou] L. E. J. Brouwer, *Beweis des Jordanschen Satzes für den  $n$ -dimensionalen Raum*, Mathematische Annalen 71, 314-319, 1912.

[Brow1] M. Brown, *A proof of the generalized Schoenflies theorem*, Bulletin of the American Mathematical Society 66, 74-76, 1960.

[Brow2] M. Brown, *Locally flat embeddings of topological manifolds*, Annals of Mathematics 75, 331-341, 1962.

[J] C. Jordan, *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, Gauthier-Villar, 1882, 1893, 1905.

[L] E. L. Lima, *Orientability of smooth hypersurfaces and the Jordan-Brouwer separation theorem*, Expositiones Mathematicae 5, 283-286, 1987.

[Ma] B. Mazur, *On embeddings of spheres*, Bulletin of the American Mathematical Society 65, 59-65, 1959.

[Mo] M. Morse, *A reduction of the Schoenflies extension problem*, Bulletin of the American Mathematical Society 66, 113-117, 1960.

[Sch] A. Schönflies, *Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten, II*, Teubner, 1908.

[W] R. L. Wilder, *Topology of manifolds*, American Mathematical Society Colloquium Publications 32, 1949.

