ABC, 21 de Junio de 2021
CIENCIA - El ABCdario de las matemáticas
Alfonso Jesús Población Sáez

La modelización matemática es útil en múltiples aplicaciones, entre ellas controlar un incendio

Adobe Stock

Uno de los objetivos que tenemos los que dedicamos tiempo a hacer divulgación matemática es el de tratar de mostrar a la sociedad la importancia de las matemáticas en nuestra vida cotidiana. Importancia consistente por ejemplo en el papel que tienen en la resolución de problemas reales. No ejercicios típicos de los que hacíamos en la escuela, sino situaciones que aparecen cada día para los que no tenemos un procedimiento concreto de resolución. Los profesores de matemáticas solemos distinguir entre ejercicios (cuestiones que se saben resolver perfectamente y que se proponen para que el estudiante adquiera una serie de técnicas, utilice los conceptos que se le han enseñado, y practique con ellos, se 'entrene' en lo que le han explicado; todo lo que se hace en las clases y en los exámenes son ejercicios) y **pr oblemas**
(situaciones para las que no hay una solución cerrada, terminada, ni un método estandarizado, susceptibles de opinión, interpretación, etc.; pocas veces se proponen en las aulas salvo para hacer pensar un poco, pero ya sabemos que el alumno, normalmente práctico, lo que quiere es aprobar y olvidarse de lo aprendido cuanto antes, así que son cuestiones reservadas para cursos específicos o personas que tienen una cierta predisposición para estos temas). Quizá de ahí venga esa 'leyenda urbana' (ya saben que los entrecomillados los suelo utilizar con cierto tono sarcástico) de que «a mí las matemáticas no me han servido para nada una vez dejé los estudios». Pero eso no indica que no sirvan; simplemente que no me ha dado la gana ver si sirven, ni para qué, que es algo muy distinto.

En las matemáticas escolares no da tiempo más que a conocer muy ligeramente (aunque a muchos les parezca que han aprendido todas las matemáticas habidas y por haber) algunos conceptos de distintas ramas de las matemáticas (un poquitín de álgebra lineal, de cálculo, de cálculo de probabilidades y estadística si el profesor que te toca ha tenido a bien no saltárselo, de trigonometría, etc.). En definitiva se nos muestran las herramientas que apenas llegamos a usar. Como si nos hicieran un muestrario de destornilladores, martillos, llaves inglesas, las tocáramos un poco, pero cuando nos toca reparar algo con ellas que sirva para algo nos digan que ya no tenemos tiempo. Básicamente eso sucede. O como si se pasaran los cursos enseñándonos las reglas del parchís, o del ajedrez, pero al final, nunca llegáramos a jugar. Desde luego que eso es aburrido. Y eso ocurre porque esas herramientas matemáticas son muy potentes, tienen mucha amplitud de aplicaciones, y su uso requiere mucho más tiempo de aprendizaje que un destornillador (que por cierto, muchos tampoco usamos bien, porque todo en esta vida tiene su importancia, su dedicación y su complejidad).

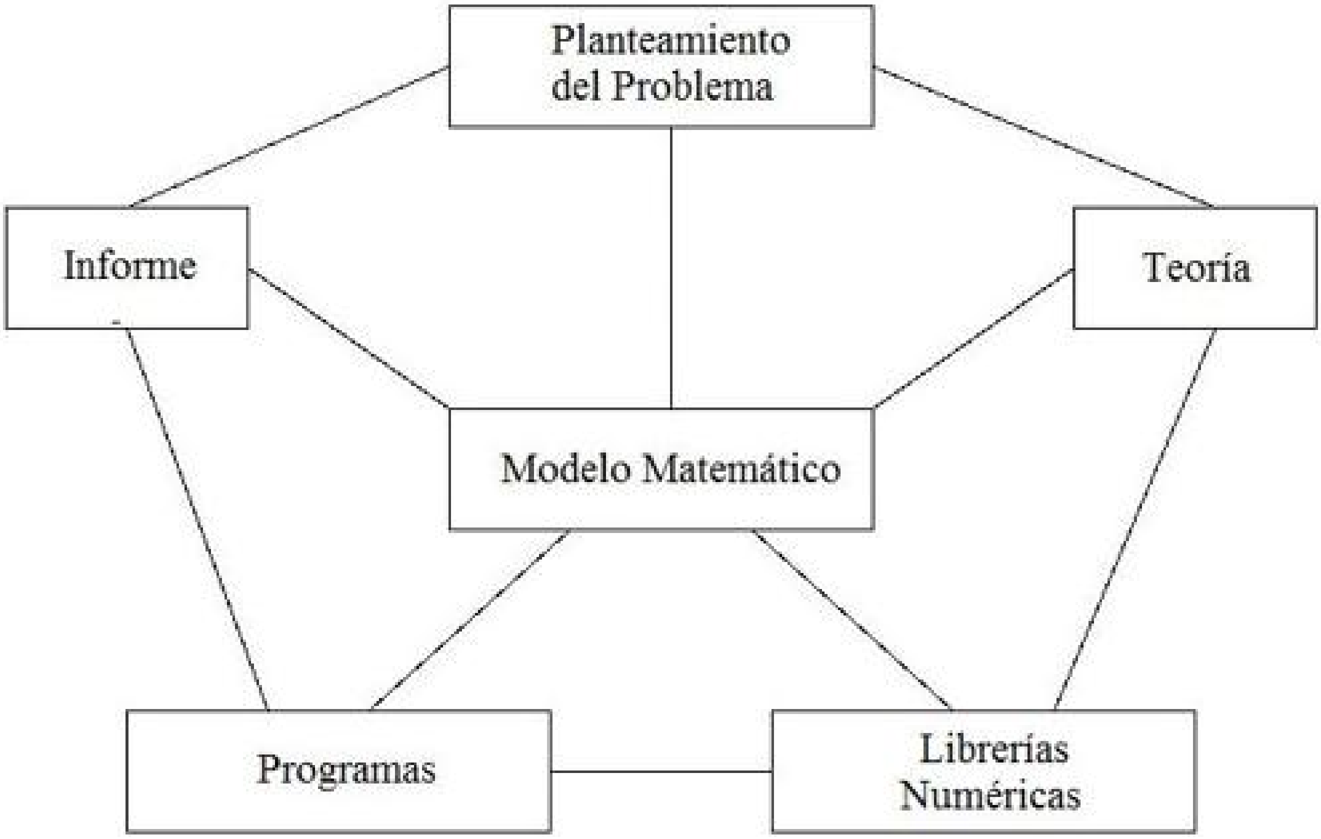
Pues bien, todas esas herramientas pueden ayudarnos en la resolución, o al menos en el entendimiento de problemas realmente difíciles, que se nos presentan diariamente como digo, y que todos queremos que se resuelvan (bueno, que los resuelvan otros, en realidad).

Me refiero a situaciones cómo la **detección de un cáncer**, el **hallazgo de una vacuna efectiva** y su dosificación, cómo prevenir y **atajar una plaga**, o un **incendio**, o una **inundación**, cómo lograr **que se recupere la economía**, cientos de situaciones que nos pueden afectar, además de otras que nos buscamos nosotros, como la manera de **poner un satélite en órbita**, **mejorar la cobertura wifi**, en fin, todo el mundo conoce situaciones problemáticas, aunque pocos saben que las matemáticas pueden ayudar, y de hecho lo hacen, en su resolución. A ello se dedica la llamada **modelización matemática de las situaciones**. Lo más parecido que todos podemos conocer de la escuela son aquellos ejercicios de enunciado en los que nos decían, por ejemplo, que halláramos la cantidad mínima de lona (porque cuesta una pasta) que deberíamos usar para fabricar una tienda de campaña que tuviera una capacidad máxima. La dificultad consistía, no en echar las cuentas, sino en el paso previo de trasladar de algún modo aquel enunciado perfectamente entendible a símbolos y ecuaciones que modelizaran perfecta y adecuadamente la situación. En los problemas reales, recordemos que, no sabemos si tienen solución, o si es única, lo que se intenta es el modelo sea lo más parecido posible a la realidad.

La **modelización matemática** es indispensable y útil en muchas aplicaciones, proporciona precisión y aclara las vías de solución, nos ayuda a entender mejor la situación, prepara el camino para un mejor diseño y control, además de permitir un uso eficiente de las capacidades tecnológicas. La modelización es un paso importante en el entrenamiento de un matemático y hace que el estudiante afronte con confianza los nuevos retos que se le puedan presentar.

Se acerca el verano, y una de las preocupaciones más importantes nos la dan los **incendios forestales**. Controlar un incendio depende de muchos factores (se pueden consignar más de 600 variables que pueden determinar la evolución de un fuego real, y obviamente hacer un modelo que lo reproduzca con exactitud es, hoy por hoy, irrealizable). Sin embargo, trabajar con modelos que se fijen en alguna de esas variables, nos enseña y ayuda a entender aspectos de su evolución.

El proceso de Modelización



El diagrama de la imagen es un pequeño esquema de la información que debe recopilarse, clasificarse, evaluarse y organizar a la hora de diseñar un modelo matemático. Las aristas representan actividades de comunicación bidireccional (flujo de información relevante) entre los nodos y las fuentes de información correspondientes. Por tanto, a través del diagrama descomponemos la modelización en 16 procesos distintos (los 6 nodos y las 10 relaciones entre ellos). Cada uno de los 6 nodos y cada una de las 10 aristas o bordes suelen requerir un repaso con cada etapa en el proceso de modelización. Éste se considera completo solo cuando el 'tráfico' a lo largo de todos los bordes se convierte en insignificante. Normalmente, el trabajo en cada arista enriquece a los nodos participantes. Si en algún momento quedamos atascados a lo largo de un borde, pasamos a otro, siguiendo unas reglas a modo de listado de verificación. Es bastante habitual que el planteamiento del problema cambie durante el proceso, gracias a la comprensión adquirida. Al final, incluso una descripción inicial del problema vaga o contradictoria debería haberse convertido en una descripción razonablemente bien definida, con un modelo matemático asociado definido con precisión (aunque quizás inexacto).

Describamos someramente en qué consiste cada uno de esos nodos. El planteamiento del problema es la descripción de la situación a resolver y puede involucrar intereses muy diversos (por ejemplo, los del cliente o del jefe o de la empresa que nos encomienda la modelización). A veces es ambiguo o incompleto, y puede responder a deseos incompatibles. La teoría contempla todo aquello necesario para la modelización (aplicaciones existentes, matemáticas necesarias, búsqueda de información relacionada).

Para la elaboración del modelo matemático se necesitan considerar conceptos y variables, relaciones entre ellos, restricciones, objetivos, prioridades o asignaciones de calidad. En ese proceso podemos elaborar programas (para los que consideraremos diagramas de flujo, implementación, interfaz de usuario, documentación) y bibliotecas numéricas de software y/o software gratuito. De todo ello concluiremos elaborando un Informe con la descripción de la situación, el análisis de la misma, los resultados obtenidos, la validación de los mismos, la comprobación, las limitaciones encontradas y las recomendaciones a las que se llega.

Las herramientas matemáticas más empleadas en los procesos de modelización (algo así como el kit algorítmico básico para obtener información numérica de los modelos) son (la lista no es exhaustiva, aunque lo parezca):

I.- Álgebra lineal numérica: Sistemas lineales de ecuaciones, problemas de valores propios, programación lineal y optimización lineal, técnicas para problemas grandes y dispersos.

II.- Análisis numérico: Evaluación de funciones, métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales y en derivadas parciales, interpolación, aproximación y ajuste (Padé, mínimos cuadrados, funciones de base radial), integración numérica (en una y varias variables, transformada de Fourier), funciones especiales, resolución de sistemas de ecuaciones no lineales, programación no lineal, técnicas para problemas grandes y dispersos,

III.- Análisis de datos numéricos (Estadística numérica): Visualización (geometría computacional 2D y 3D), estimación de parámetros (mínimos cuadrados, máxima verosimilitud), predicción, clasificación, análisis de series temporales (procesamiento de señales, filtrado, correlaciones de tiempo, análisis espectral), series temporales categóricas (modelos ocultos de Markov), números aleatorios y métodos de Monte Carlo, técnicas para problemas grandes y dispersos

IV.- Análisis funcional numérico: Ecuaciones diferenciales ordinarias (problemas con valores iniciales, problemas con valores en la frontera, problemas con valores propios, estabilidad), técnicas para grandes problemas, ecuaciones en derivadas parciales (diferencias finitas, elementos finitos, elementos de contorno, generación de mallas, mallas adaptativas), ecuaciones diferenciales estocásticas, ecuaciones integrales (y regularización)

V.- Algoritmos no numéricos: Métodos simbólicos (álgebra informática), clasificación, compresión, criptografía, códigos correctores.

En efecto, es un kit muy grande, pero las situaciones con las que hay que lidiar no son elementales. Por no abrumarles más (habría que describir las reglas generales de actuación en la modelización), vayamos con una situación concreta, ya modelizada.

Control de incendios

Existen colecciones de ecuaciones matemáticas deducidas de principios físicos básicos o de datos experimentales. Se utilizan ordenadores para resolver sistemas de ecuaciones que serían difíciles o tediosos de resolver a mano. Los modelos informáticos más simples resuelven ecuaciones individuales, mientras que los modelos más complejos se componen de cientos o miles de ecuaciones. Los modelos de incendio son útiles para predecir el desarrollo de un incendio en una habitación o estructura, para evaluar escenarios de incendio desarrollados por un investigador, para comparar eventos de incendio con líneas de tiempo establecidas y para realizar análisis hipotéticos.

Debido a la amplia gama de modelos de incendios disponible, se necesitan diferentes niveles de experiencia para aplicar correctamente los modelos a las investigaciones. Los usuarios de modelos de incendios deben tener un conocimiento profundo de las hipótesis específicas para cada modelo y los orígenes de las correlaciones experimentales y los datos utilizados como entradas. Cada modelo tiene sus limitaciones específicas. Hay dos categorías principales de modelos de incendio en sala: modelos de zona y modelos de campo.

Los **modelos de zona** dividen las habitaciones o los recintos en una o más zonas. Los más

utilizados asumen que una habitación se compone de dos zonas: una capa superior que consta de productos de combustión calentados y una capa inferior que se compone de aire más frío relativamente libre de productos de combustión. En un modelo de dos zonas, el fuego conecta ambas capas. Se supone que las capas están bien mezcladas, por lo que las condiciones dentro de cada capa se suponen constantes. La temperatura prevista dentro de la capa caliente, por ejemplo, se supone la misma en todas partes. Muchos de los modelos incluyen provisiones para aberturas al exterior u otras estancias y para pérdidas de calor porlas paredes y el techo. Las entradas del modelo generalmente incluyen las dimensiones de la habitación y los materiales de construcción, los tamaños y ubicaciones de las aberturas de la habitación, las características del mobiliario de la habitación y la tasa de liberación de calor del fuego. Los resultados suministran la predicción del tiempo de activación de los rociadores o de la alarma contra incendios, el tiempo hasta la descarga disruptiva, las temperaturas de las capas superior e inferior, la altura de la interfaz entre las capas superior e inferior y las concentraciones de gas de combustión. Hay mucha información y software disponible sobre incendios en el Instituto Nacional de Estándares y Tecnología
(NIST).

Un ejemplo de modelo es el siguiente:

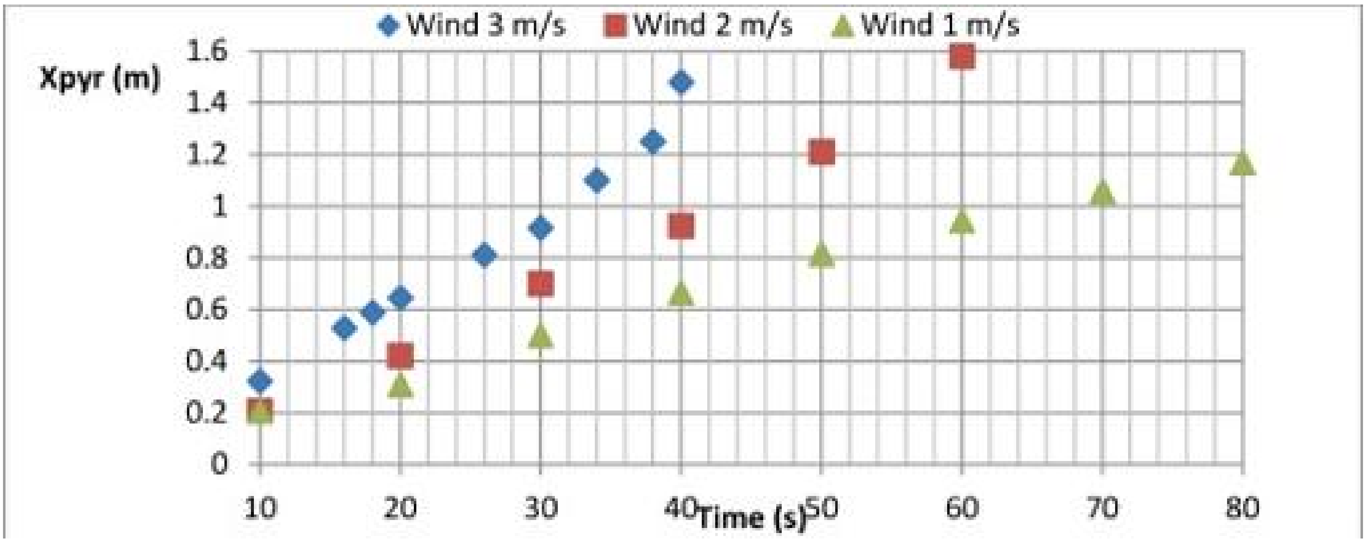
$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \tilde{\rho} = -q + \frac{1}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}} \nabla^2 \tilde{\rho}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \omega = \nabla \times \tilde{\rho}\,\frac{\vec{g}}{g} + \frac{1}{\mathrm{Re}} \nabla^2 \omega$$

$$\nabla^2 \psi = -\omega$$

Tranquilos, no voy a intentar detallarles que es cada cosa que aquí aparece (donde como ven el único número es el 2 y no es una potencia precisamente). Simplemente decirles que se trata de un sistema de **tres ecuaciones en derivadas parciales**, las dos primeras parabólicas (una para la densidad ρ y otra para la vorticidad ω), mientras que la tercera (la función de flujo, conocida como ecuación de Poisson) es elíptica. Estos sistemas normalmente no se saben resolver, de modo que lo que se hace es buscar aproximaciones numéricas, que describen bastante bien el comportamiento real. El sistema anterior está diseñado para aplicarse en un recinto plano cualquiera (un polígono, la forma que puede tener la planta de cualquier habitación). Un algoritmo numérico utilizado para resolver ese sistema consiste en reemplazar las derivadas parciales por diferencias centrales de segundo orden, obteniendo la solución mediante un esquema de Dirección Implícita Alternada (ADI) (Este comentario es para que no se aburran los que están familiarizados con matemáticas avanzadas).

Luego están los **modelos de campo**, también conocidos como modelos de dinámica de fluidos computacionales, que dividen una habitación o recinto en una gran cantidad de pequeñas cajas tridimensionales llamadas celdas. El recinto puede contener cientos de miles de celdas que varían en tamaño desde centímetros hasta metros. Los modelos de campo se basan en los principios físicos básicos de conservación de energía, masa y momento. Con el ordenador calculamos el movimiento de calor y humo entre las celdas a lo largo del tiempo.



En cualquier momento, es posible determinar la temperatura, la velocidad y las concentraciones de gas dentro de cada una de las celdas. Como en el caso de los modelos de zona, se supone que las propiedades dentro de cada celda son constantes. Sin embargo, debido al mayor número de celdas, las condiciones en el recinto se pueden predecir con mucho mayor detalle. Al ser más complejas, requieren un alto nivel de experiencia para operar y actualmente se ejecutan en equipos informáticos costosos. En la imagen, evolución de un incendio en un bosque en el tiempo en función de la velocidad del viento. Sobre modelización matemática de incendios hay mucha información y bibliografía. El lector interesado puede ahondar un poco más (sin excesivos tecnicismos matemáticos) en este enlace .

Como el citado ejemplo, hay cientos de situaciones en las más diversas disciplinas (científicas muchas, pero también las hay de humanidades), a las que hoy en día se aplica un modelo matemático (con su consiguiente algoritmo), que tratan de hacernos nuestra existencia un poco mejor, al menos más entendible y por tanto, controlable. Y como comprenderán estos modelos no se encuentran de la noche a la mañana. Eso sí, el gasto en su investigación no requiere de tantos recursos (hablo de dinerito, obviamente) como otras áreas de la ciencia y aun así, algunos consideran que las matemáticas no sirven para nada.

Alfonso J. Población Sáez es profesor de la Universidad de Valladolid y miembro de la Comisión de divulgación de la RSME.

El ABCDARIO DE LAS MATEMÁTICAS es una sección que surge de la colaboración con la Comisión de Divulgación de la Real Sociedad Matemática Española (RSME)