1. Introducción.

Los dados son, sin lugar a dudas, uno de los principales elementos con los que se asocia el azar. Generalmente se piensa que, si están bien construidos, antes de lanzar los dados es imposible saber qué va a obtenerse en ellos. Esa idea lleva a pensar que no es posible predecir algunos resultados que pueden aparecer, y que por tanto, no se puede hacer ninguna predicción. El motivo es que debido a la aleatoriedad que se adjudica a los dados, no se tienen en cuenta propiedades que permiten conocer o predecir alguno de esos resultados.

La característica anterior hace que cuando se utilizan dados en un truco de magia, la sorpresa venga aumentada por esa idea de que los dados representan el azar puro y duro.

Como hemos comentado en otros artículos de esta sección, la magia tiene el gran atractivo de asombrar al público y atraer su atención. Como además suele crear incredulidad, motiva fácilmente a querer saber cómo ha sido posible algo que, a simple vista, parece imposible. Esta motivación es la que debe interesar al profesorado de matemáticas para utilizar la magia como recurso en el aula. Utilizando juegos de magia cuyo fundamento sea matemático, podemos conseguir que el alumnado investigue con interés las matemáticas que dan consistencia a ese truco mágico. Por ello, en todos los trucos veremos no solamente cómo se pueden hacer sino también los cálculos matemáticos que fundamentan ese truco y que permiten que siempre funcionen sin necesidad de una especial habilidad del mago.

En este artículo he pretendido aglutinar todos los casos de trucos mágicos con dados que se pueden encontrar. Aunque algunos son muy conocidos, pues se repiten con asiduidad en la red digital, he preferido incluirlos para acompañarlos de explicaciones que dejen en evidencia las matemáticas que están detrás. Aunque la mayoría los conocía desde hace tiempo, he encontrado algunos nuevos en una de las mejores páginas de magia y matemáticas que existen, la sección “ El rincón matemágico ” de mi amigo Pedro Alegría, en esta misma página de divulgamat. Sitio de visita obligada para todos los interesados en la magia matemática.

Los dados.

La forma más cotidiana que conocemos en los dados es la cúbica, aunque no deja de ser

curioso que uno de los restos físicos más antiguos que existen de dados correspondientes al Juego Real de Ur, tienen forma de tetraedro, con una antigüedad de unos 4.500 años.

Según los historiadores, los primeros dados que se han encontrado en excavaciones arqueológicas no estaban bien construidos pues, al parecer, se usaban primordialmente de forma esotérica para adivinar el futuro. Como los usuarios pensaban que los resultados dependerían de los dioses, no importaba mucho que la construcción fuese perfecta y que, por lo tanto, los dados fuesen equiprobables.

No fue hasta el Renacimiento, tras los estudios probabilísticos de Blaise Pascal y Galileo Galilei cuando se comenzó a cuidar más la forma de construir los dados.

Pero lo que a nosotros nos importa es la distribución concreta en que están repartidos los puntos en los dados. Ya en el *Libro de axedrez, dados e tablas* encargado en el siglo XIII por Alfonso X el Sabio, rey de Castilla, León y Galicia, se dedicaron varios apartados a la construcción correcta de los dados y a la distribución de los puntos en sus caras.

Los dados actuales se rigen por lo que se conoce como la distribución de siete, en la cual las caras opuestas suman siete. De esa forma se emparejan el 1 con el 6, el 2 con el 5 y el 3 con 4. Esta distribución es fundamental, pues prácticamente todos los trucos de magia con dados se basan en esa propiedad. Y es importante que confirmemos que se cumple, pues en una ocasión, en que impartía un taller para el profesorado, nos llevamos unos dados de goma grandes de los utilizados en infantil y vimos que no salían los trucos que llevábamos preparados, y era debido a que los dados no seguían esa máxima.

Otro aspecto que se suele tomar como norma en los dados es la orientación de las caras. Si tomamos un dado y nos fijamos en el vértice formado por las caras con 1, 2 y 3, vemos que los números están colocados en el sentido antihorario. Aunque esto no siempre se cumple, como podemos ver en la imagen 1. Eso suele ocurrir en los dados chinos que no llevan la misma orientación que los españoles, aunque en nuestro país se suelen encontrar con facilidad dados con orientación horaria.

2. Adivinar tres caras de dados.

Se necesitan tres dados y una calculadora por si la persona elegida del público no es muy ducha en cálculos mentales. Si se utiliza una calculadora hay que tener la precaución de que cada vez que se haga una operación se le dé a la tecla de igual, pues como no se suelen utilizar paréntesis, la jerarquía de operaciones puede hacer que el cálculo final de la calculadora no coincida con el que nos interesa.

2.1. Puesta en escena.

Se entregan tres dados a un voluntario y, mientras el mago se vuelve de espaldas, se le pide que lance los tres dados y haga una serie de operaciones con los números que le han salido en las caras superiores de los tres dados.

Los pasos a seguir son los siguientes:

a) Al valor del primer dado le suma 3 y multiplica el resultado por 5.

b) A lo obtenido se le suma 2 y se multiplica por 2.

c) Al resultado se le suma el valor del segundo dado, se le resta 4 y se multiplica por 2.

d) Se suma a lo obtenido 7 y se multiplica por 5.

e) Por último, al resultado de las operaciones anteriores se le suma el tercer valor del dado y se le resta 9.

f) Basta que el voluntario le indique el valor resultante de todas las operaciones al mago, quien inmediatamente indica cuales han sido los valores que han aparecido en los dados.

El mago sólo debe restarle 326 al número que le indica el espectador para obtener un número de tres cifras que son precisamente los valores aparecidos en los dados.

2.2. Explicación del truco.

Este es uno de los típicos trucos de magia que se fundamentan en el álgebra para funcionar. Basta escribir la expresión algebraica correspondiente para descubrir el número oculto, que sólo sirve para enmascarar el resultado final. Si suponemos que **a, b** y **c** son los tres valores de los dados, veamos el proceso que se sigue:

a) $(a + 3)\cdot 5$

b) $((a+3)\cdot 5 + 2)\cdot 2$

c) $[((a+3)\cdot 5 + 2)\cdot 2 + b - 4]\cdot 2$

d) $\{[((a+3)\cdot 5 + 2)\cdot 2 + b - 4]\cdot 2 + 7\}\cdot 5$

e) $\{[((a+3)\cdot 5 + 2)\cdot 2 + b - 4]\cdot 2 + 7\}\cdot 5 + c - 9$

Si desarrollamos esta última expresión tenemos:

$\{[((a+3)\cdot 5 + 2)\cdot 2 + b - 4]\cdot 2 + 7\}\cdot 5 + c - 9 = \{[(5a + 15 + 2)\cdot 2 + b - 4]\cdot 2 + 7\}\cdot 5 + c - 9 = [(10a + 34 + b - 4)\cdot 2 + 7]\cdot 5 + c - 9 = (20a + 2b + 60 + 7)\cdot 5 + c - 9 = 100a + 10b + 335 + c - 9 = 100a + 10b$

+ c + 326

Como vemos, si le restamos 326 al número nos queda uno de tres cifras que son **a b** y c, los números aparecidos en los dados.

2.3. Fundamento matemático.

Los números que se suman se pueden cambiar a voluntad, pues lo único importante es que, antes de sumar el segundo valor hayamos multiplicado el primer valor por 10, se puede hacer en una sola multiplicación o en dos, como hemos visto en el ejemplo. Después, antes de sumar el tercer valor, debemos multiplicar el resultado otra vez por 10 en uno o dos pasos. Todos los demás números que se suman o restan, solo sirven para crear lo que se llama el “velo”, es decir, el número que enmascara la solución.

Una manera que parece más aleatoria a la hora de poner el truco en escena, consiste en solicitar a nueve espectadores que digan un número entre 2 y 5 inclusive. Raro será que no se repite el 2 dos veces y otras dos el 5. En ese caso, podemos ser nosotros quienes digamos la última cifra según nos convenga. Posteriormente podemos ir sumando o restando a placer, lo único que tenemos que hacer es anotar todas las cifras en un papel, e ir escribiendo el orden en el que le damos al espectador los números, para saber qué “velo” va a quedarnos al final.

3. La columna de dados.

Este es un juego que utilizo en clase hace mucho tiempo, pero del que he encontrado una ampliación en la página de Pedro Alegría. Su puede jugar con tres o cuatro dados o los que se quiera, pues el cálculo es equivalente sea cual sea la cantidad de dados.

3.1. Puesta en escena.

El mago le entrega a un voluntario del público tres dados y se vuelve de espaldas. Le pide al

espectador que lance los tres dados y que coloque uno encima de otro formando una columna.

Imagen 2: Columna de dados.

Una vez construida, el mago observa la columna y le indica al espectador cuánto vale la suma de las caras que no están a la vista. Las caras que no pueden verse son aquellas en las que un dado se apoya en otro o sobre la mesa.

El espectador que está realizando el truco va levantando los dados y sumando las caras, con ayuda del público y se comprueba que el mago ha acertado.

Para resolver el truco basta observar el número que está en lo alto de la columna y restarle ese valor al resultado de multiplicar el número de dados que haya por siete.

En la columna que aparece en la imagen 2, la suma de las caras ocultas sería 21 – 5 = 16.

3.2. Fundamento matemático.

Es uno de los trucos más fáciles de estudiar. Como por la distribución estándar las caras opuestas de un dado suman siete, todas las caras que están ocultas suman siete para cada dado, exceptuando el primer dado una de cuyas caras ya está a la vista. Por ello, todas las caras que están en la vertical de los dados suman siete y sólo hay que multiplicar por siete el número de dados que se ha utilizado en el truco y restarle la cara superior visible.

3.3. Más difícil todavía.

Es posible saber cuánto suman las caras ocultas incluso sin necesidad de saber cuánto vale la primera. Para ello, además de utilizar que las caras opuestas de un dado suman siete, debemos tener presente el sentido antihorario de colocación de los valores.

Si nos fijamos en la siguiente columna tenemos tapado el valor superior, pero aún así podemos saber no solo cuánto vale la suma de las caras ocultas sino el orden en el que están, lo que puede hacer aún más visible el espectáculo ya que se puede decir que vaya enseñando el voluntario las caras ocultas de los dados y el mago dirá, antes de tomar el dado, cuánto vale la cara que va a salir.

Imagen 4: Columna alineada.

4. Tirar y tirar.

Se necesitan tres dados y no está de más tener un papel y un lápiz para anotar los puntos que va sumando la persona que hace los cálculos, pues no es raro que haya equivocaciones.

4.1. Puesta en escena.

Se entregan tres dados a un espectador y el mago, tras volverse de espaldas, le da las siguientes indicaciones.

a) Lanza los tres dados y suma los valores que aparecen en las caras superiores.

b) Toma uno cualquier de los dados y añádele al resultado de la suma anterior el valor de la cara inferior, aquella sobre la que estaba apoyada en la mesa.

c) Lanza de nuevo ese dado y añade a la suma la cara superior que ha salido tras el nuevo lanzamiento.

d) Elige otro dado cualquiera, que puede ser el mismo que en el caso anterior y repite los pasos b y c.

Tras seguir esas instrucciones, el mago se gira hacia la mesa donde están los dados y le indica al espectador cuánto ha dado la suma que ha realizado.

Para conseguirlo el mago solo tiene que sumar 14 a la suma de los valores que vea en ese momento en los dados sobre la mesa, independientemente de cuál hayan sido los dados que se han vuelto a lanzar.

4.2. Fundamento matemático.

Basta recordar que la suma de las dos caras opuestas de un dado siempre vale siete. Si suponemos que los dados han mostrado inicialmente las caras a, b y c, si tomados el primer dado y le sumamos la cara inferior y lo volvemos a lanzar obteniendo d como cara superior tendríamos, hasta el momento, la suma $a + b + c + (7 – a) + d = b + c + d + 7$.

Si tomamos ahora, por ejemplo el segundo dado y le añadimos su cara inferior $(7 – b)$ y lo lanzamos otra vez obteniendo e como resultado, la suma final que hará el espectador será $b + c + d + 7 + (7 – b) + e = c + d + e + 14$.

Los pasos b y c de las instrucciones se puede hacer una sola vez o las veces que estime el mago, sólo debe tener en cuenta que por cada vez que se realicen debe sumar 7 a la suma de los valores que quedan a la vista tras el proceso.

5. Suma y vuelta.

De nuevo tenemos tres dados. Para diferenciarlos a la hora de seguir los pasos vamos a suponer que son de tres colores, aunque basta tener claro cuál es el primer dado, cuál el segundo y cuál el tercero.

5.1. Puesta en escena.

Se entregan tres dados de colores diferentes a un voluntario junto con una predicción del mago en un papel. Se le pide que realice los siguientes pasos.

a) Lanza los tres dados. Toma el rojo y el verde y suma los valores superiores de los dados.

b) A continuación coloca el rojo junto al azul, le das a los dos media vuelta y añade a la suma anterior la suma de los valores que quedan ahora en las caras superiores de los dados.

c) Por último, toma el verde y al azul, tal como están en ese momento, y de forma conjunta le das media vuelta. De nuevo añade a la suma parcial que llevas hasta el momento los dos valores que han quedado en las caras superiores.

d) Ya solo le queda abrir el papel con la predicción del mago y comprobar que la suma le ha dado 21 tal como predijo el mago.

5.2. Fundamento matemático.

Vamos a suponer que en la cara de los tres dados han aparecido los números r, v y a. Vamos a

seguir los cálculos realizados.

a) Sumamos r + v

b) Al dar la vuelta al dado rojo y azul, lo que vamos a sumar son sus antiguas caras inferiores: r + v + 7 – r + 7 – a = 14 + v – a.

c) Al dar la vuelta a los dados verde y azul tal como estaban nos encontramos con la cara 7 – v y la cara a que añadidos a lo anterior nos da: 14 + v – a + 7 – v + a =21.

6. Cambio de dados.

Basado en la idea de los juegos anteriores, imaginé la siguiente versión que yo, al menos, no he encontrado en otro sitio. En este caso se necesitan dos voluntarios que tendrán cada uno de ellos dos dados. Como hay un intercambio de dados que pueden ser cualesquiera, al público le da la impresión de que ese azar puede modificar el resultado final posible. Impresión que es falsa.

6.1. Puesta en escena.

Se invitan a dos personas del público a participar. Se entregan cuatro dados, dos a cada uno de los voluntarios del público. Se siguen los siguientes pasos, con el mago vuelto de espaldas.

a) Ambos jugadores lanzan los dados y suman los dos valores que han obtenido con sus dados.

b) A continuación se intercambian uno de los dos dados. Es decir, el primer jugador entrega uno de sus dados al otro y recibe uno de él, ambos en la misma posición en que han quedado.

c) En el siguiente paso, ambos jugadores dan media vuelta conjuntamente a los dos dados de que disponen ahora, y añaden a la suma anterior la suma de las caras que han quedado ahora.

d) Por último, el mago pregunta a uno de los jugadores cuánto ha obtenido de suma y puede decir inmediatamente cuánto vale la suma del otro jugador.

El mago sólo debe restar de 28 el valor de la suma de uno de los jugadores para obtener lo que tiene el otro.

6.2. Fundamento matemático.

El que los jugadores se intercambien un dado sólo trata de enmascarar que realmente lo que se está sumando son las caras opuestas de los cuatro dados, por lo que el resultado de la suma conjunta siempre será 28. Por ello, sabiendo la suma de uno de los jugadores es inmediato saber la del otro.

Si queremos dar la impresión de que la suerte modifica los resultados posibles, se puede pedir a otro espectador que indique a cuál de los dos voluntarios le debe preguntar la suma.

7. El producto de las caras.

Un espectador recibe dos dados y una predicción del mago sobre el resultado que va a obtener después de hacer una serie de operaciones.

7.1. Puesta en escena.

Tras lanzar los dados, el espectador hace las siguientes operaciones.

1) Multiplica los números que quedan en las caras superiores de los dados.

2) Multiplica los números que quedan en las caras inferiores de los dados, aquellas sobre las que han quedado apoyados los dados tras ser lanzados.

3) Multiplica la cara superior del primer dado por la inferior del segundo.

4) Multiplica la cara superior del segundo dado por la inferior del primer dado.

5) Por último suma los cuatro resultados de las operaciones y comprueba que obtiene 49 que es lo mismo que había escrito el mago en el papel.

7.2. Fundamento matemático.

Teniendo en cuenta la propiedad fundamental en la distribución de los dados, basta recordar que si el primer dado tiene **a** en su cara superior, en la inferior tendrá **7 – a,** e igual para el otro dado.

Si tenemos en cuenta los cuatro productos que debe hacer el espectador y los sumamos tendremos la siguiente expresión:

$$a\cdot b + (7 - a)\cdot(7 - b) + a\cdot(7 - b) + b\cdot(7 - a) = a\cdot b + 49 - 7a - 7b + a\cdot b + 7a - a\cdot b + 7b - a\cdot b = 49.$$

Luego el resultado es siempre 49, independientemente de lo que hubiese salido en los dados al lanzarlos.

8. El número de seis cifras.

De nuevo tenemos tres dados y una calculadora para realizar una serie de operaciones.

8.1. Puesta en escena.

Tras seleccionar a alguien del público y entregarle los tres dados, el mago se vuelve de espaldas y da las siguientes indicaciones

1) Lanza los tres dados y forma con los tres dados un número de tres cifras uniendo los tres dados, por ejemplo el 253.

2) Ahora le das media vuelta al conjunto de los tres dados sin modificar el orden y esa cantidad la añades detrás del número anterior, obteniendo un número de seis cifras.

3) Por último, divide en una calculadora el número obtenido entre 111 y le indicas el cociente resultante al mago.

4) El mago realiza mentalmente una serie de operaciones y le indica al espectador qué números salieron inicialmente al lanzar los tres dados.

El truco consiste en restarle siete al valor que ha indicado el espectador y dividir por 9 el resultado. El mago obtiene un número de tres cifras que son las que salieron aleatoriamente en los dados.

8.2. Fundamento matemático.

Vamos a hacer el estudio matemático del fundamento de este truco.

Hemos obtenido un número de seis cifras abcdef que desarrollado sería:

$$a\cdot 100.000 + b\cdot 10.000 + c\cdot 1.000 + d\cdot 100 + e\cdot 10 + f$$

Ahora bien, como d, e y f eran las caras opuestas en los dados a las caras con a, b y c, resulta que se cumple que d = 7 – a, e = 7 – b y f = 7 – c. Llevando estos resultados a la expresión anterior, operando y reduciendo obtenemos:

$$a\cdot 100.000 + b\cdot 10.000 + c\cdot 1.000 + (7 - a)\cdot 100 + (7 - b)\cdot 10 + 7 - c = a\cdot 99.900 + b\cdot 9.990 + c\cdot 999 + 777$$

Tras dividir ese número por 111 nos queda el siguiente valor:

$$a\cdot 900 + b\cdot 90 + c\cdot 9 + 7$$

Tras restar 7 y dividir el resto por 9 nos quedamos con la expresión $a\cdot 100 + b\cdot 10 + c$, es decir el número abc cuyas cifras son los valores aparecidos en los dados tras lanzarlos.

9. Derecha o delante.

Vamos a necesitar un dado y aprovechar la orientación para hacer un truco bastante llamativo. Según comenta Pedro Alegría en su página, está creado por el mago americano Karl Fulves, especialista en magia matemática.

9.1. Puesta en escena.

Con el mago vuelto de espaldas, el voluntario del público lanza el lado sobre la mesa y ahora evoluciona de la siguiente manera.

Si el valor superior es impar gira 90º el dado hacia la derecha, es decir, gira sobre la arista derecha del cuadrado de la base. Si el valor superior es par, gira 90º hacia delante.

Este proceso lo repite hasta que aparezca el uno. Lo hace una nueva vez. Si obtiene un número impar, continúa con el proceso hasta que vuelve a conseguir uno y da un último cuarto de vuelta.

Tras ese último giro en la cara superior quedará el 4.

9.2. Desarrollo del proceso.

Supongamos que el dado ha quedado tal como se presenta en la imagen.

10. Par o impar.

Para acabar, vamos a ver un juego basado en una idea similar al anterior.

10.1. Puesta en escena.

Se entrega un dado a un espectador y se le pide que lo lance. Sobre el dado se le explica al espectador que debe girarlo 90º grados en cualquier dirección. Puede ser girarlo a izquierda o derecha sobre la propia cara que ha quedado sobre la mesa, o girarlo sobre cualquier de las aristas de la cara sobre la que está apoyado el dado.

Si obtenemos el siguiente valor del dado:

Imagen 6: Resultado inicial

10.2. Fundamento matemático.

La fundamentación matemática está en el hecho de que si nos fijamos en una esquina determinada del dado y sumamos los tres valores de las caras que determinan ese vértice, al girar 90º en cualquiera de las direcciones indicadas, la nueva distribución que queda en el vértice que ha sustituido al anterior, la suma de sus valores ha cambiado la paridad. Es decir, si al principio era una suma par, al girar 90º la suma que se obtiene es impar.

La justificación es evidente. Cuando giramos un dado un cuarto de vuelta, de las tres caras iniciales dos de ellas se mantienen, una en la misma posición y la otra cambiando de lugar, y hay una nueva cara que sustituye a la desaparecida. Pero esa cara es precisamente la opuesta a la que desaparece y como en las caras opuestas una es par y la otra es impar, es lo que hace que cambie la paridad.

Esto se puede comprobar comparando las imágenes 6 y 7.

Si volvemos ahora al truco. Si nosotros pedimos que se mueva un número par de veces, la paridad del vértice que hemos observado se mantendrá, si se pide un número impar de veces, cambiara la paridad. Por ello, como nos habremos fijado en qué paridad tiene la esquina elegida antes de volvernos y sabemos cuántos movimientos va a realizar el voluntario, sabemos cómo debe quedar la paridad del vértice. Si al volvernos y observar los valores que forman ahora el vértice elegido vemos que la paridad es la esperada, el espectador no ha hecho el último giro, en caso contrario si lo ha realizado.