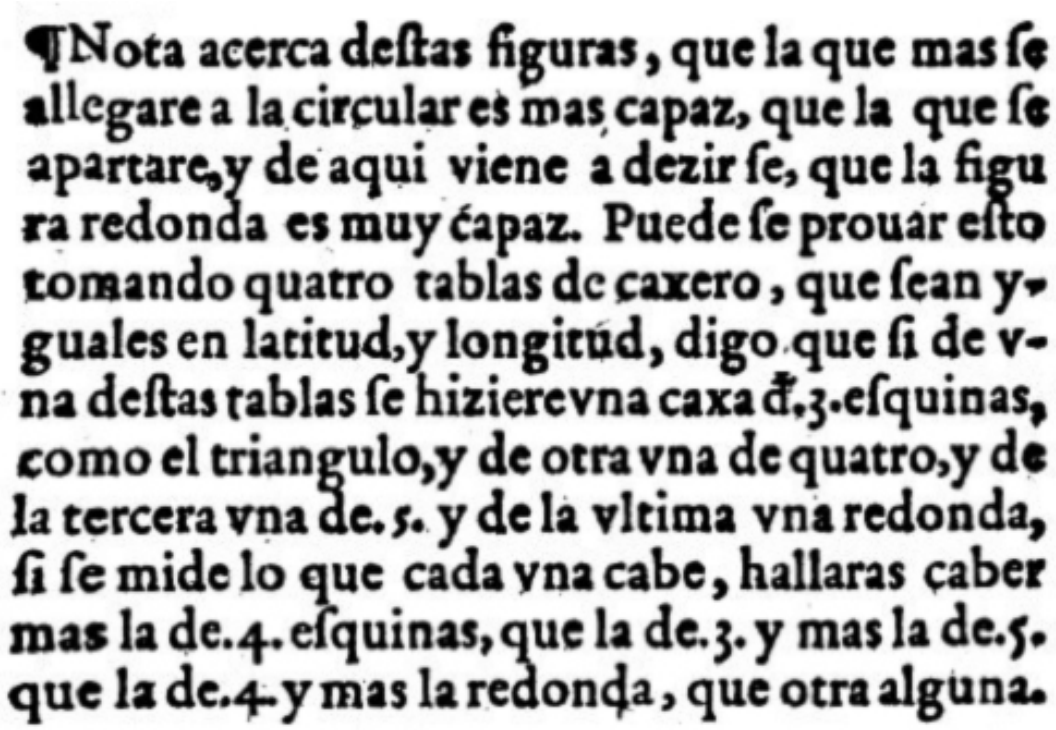
1. Un ejemplo, a modo de introducción

En la *Arithmetica practica, y speculativa* (1562, Lib. IV, cap. II, p. 308), el bachiller Juan Pérez de Moya [1] , refiriéndose a las figuras isoperimétricas, nos proporciona un buen ejemplo de la utilización de material didáctico manipulativo (cuatro tablas de cajero de la misma longitud y altura) para demostrar la proposición siguiente:

De todas las figuras isoperimétricas, la de mayor área es el círculo.



¶Nota acerca deſtas figuras, que la que mas ſe allegare a la circular es mas capaz, que la que ſe apartare, y de aqui viene a dezir ſe, que la figura redonda es muy capaz. Puede ſe prouar eſto tomando quatro tablas de caxero, que ſean yguales en latitud, y longitud, digo que ſi de vna deſtas tablas ſe hiziere vna caxa d'.3. eſquinas, como el triangulo, y de otra vna de quatro, y de la tercera vna de .5. y de la vltima vna redonda, ſi ſe mide lo que cada vna cabe, hallaras caber mas la de .4. eſquinas, que la de .3. y mas la de .5. que la de .4. y mas la redonda, que otra alguna.

2. Poliedros didácticos

La presencia de representaciones tridimensionales de poliedros se remonta al Neolítico (2000 a. C.).

De una época más reciente, siglos II y III d. C., son algunos dados etruscos con la forma de dodecaedro regular e icosaedro regular.

Aunque se desconoce la utilidad de dichos objetos 3D, su existencia pone de manifiesto que los poliedros regulares «físicos» convivieron con el hombre desde la más remota antigüedad.



Poliedros regulares neolíticos de Escocia (Ashmolean Museum de Oxford)





Dodecaedro e icosaedro etruscos (s. II – III d. C.)

Así las cosas, dando un gran salto en el tiempo, nos trasladamos al Museo de Capodimonte (Nápoles) donde podemos contemplar el *Retrato de Luca Pacioli* [2] (1495).



della



Regular hexahedron, or cube, in perspective drawing, appearing in a book, se encuentra un dodecaedro regular hexahedron, or cube, in perspective drawing, appearing in a book, se encuentra un dodecaedro



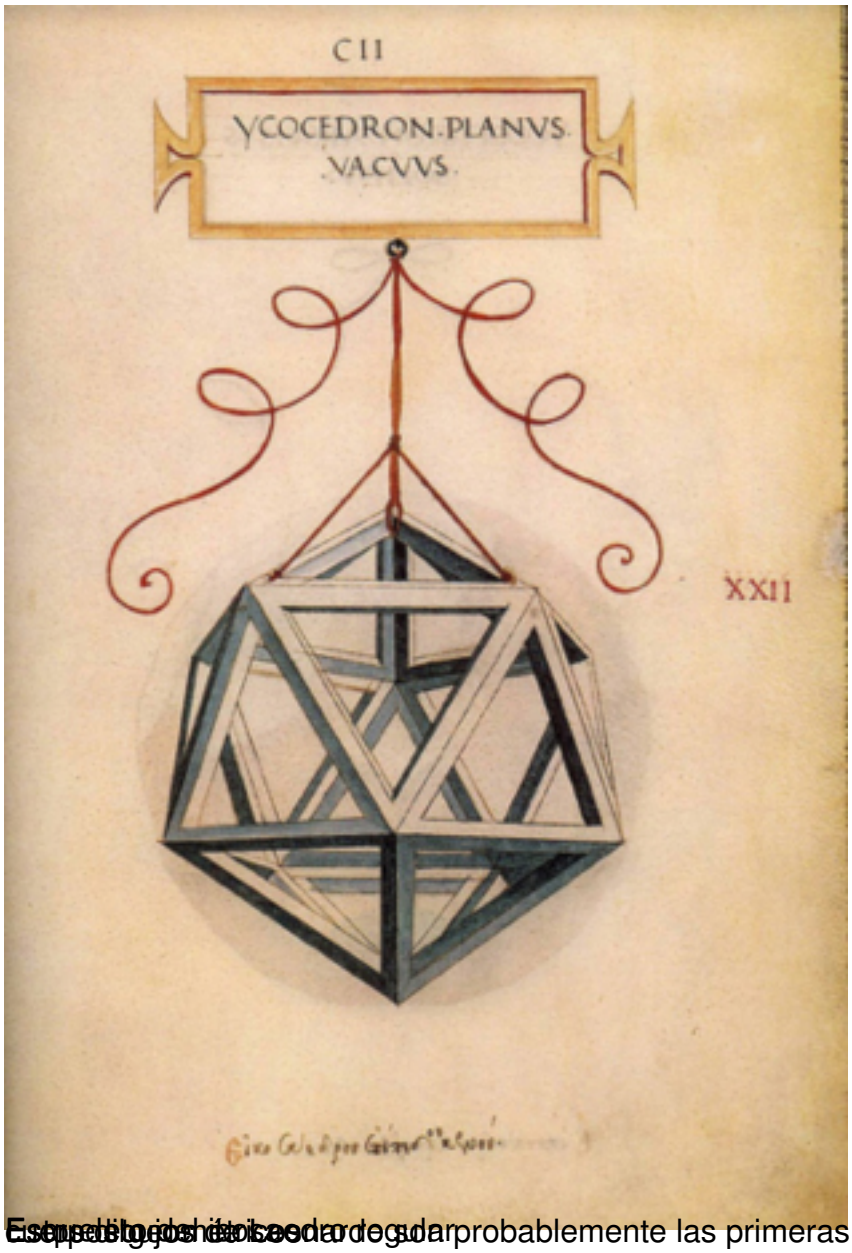
Ilustración de Leonardo da Vinci para la obra de Luca Pacioli

3. Leonardo da Vinci y sus esqueletos de poliedros

Durante el siglo XV, los profesores italianos ya



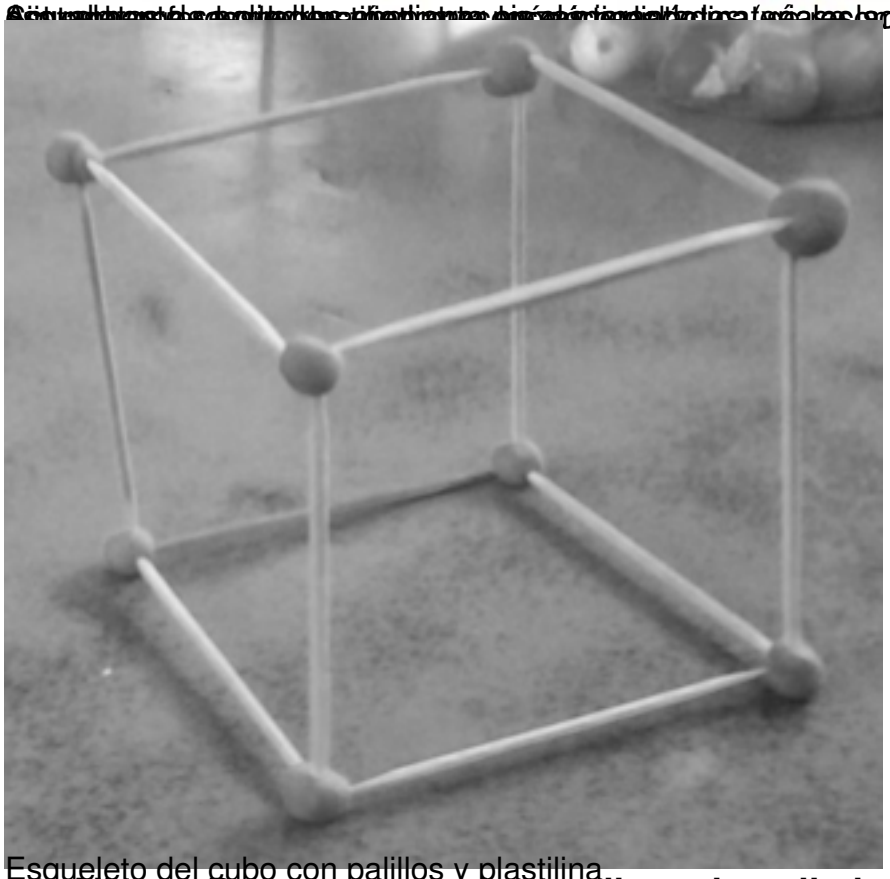
[8] Leonardo da Vinci (1452 a 1519) [9] Un gran hombre de pequeñas [10] Hasta que se representaron esquemas [11] de Da Vinci para la obra



Estas ilustraciones fueron realizadas por Leonardo da Vinci y probablemente las primeras ilustraciones de los esqueletos de



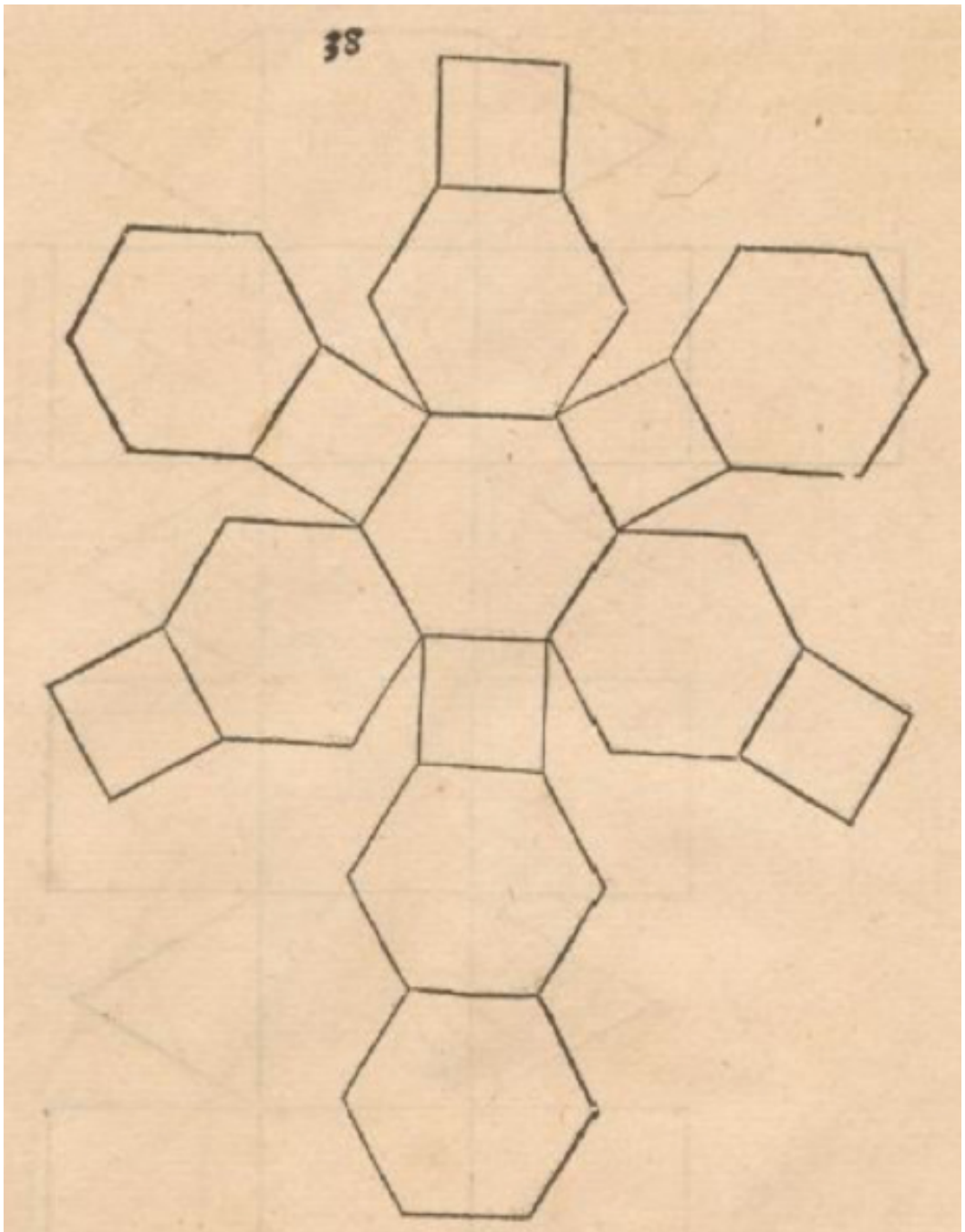




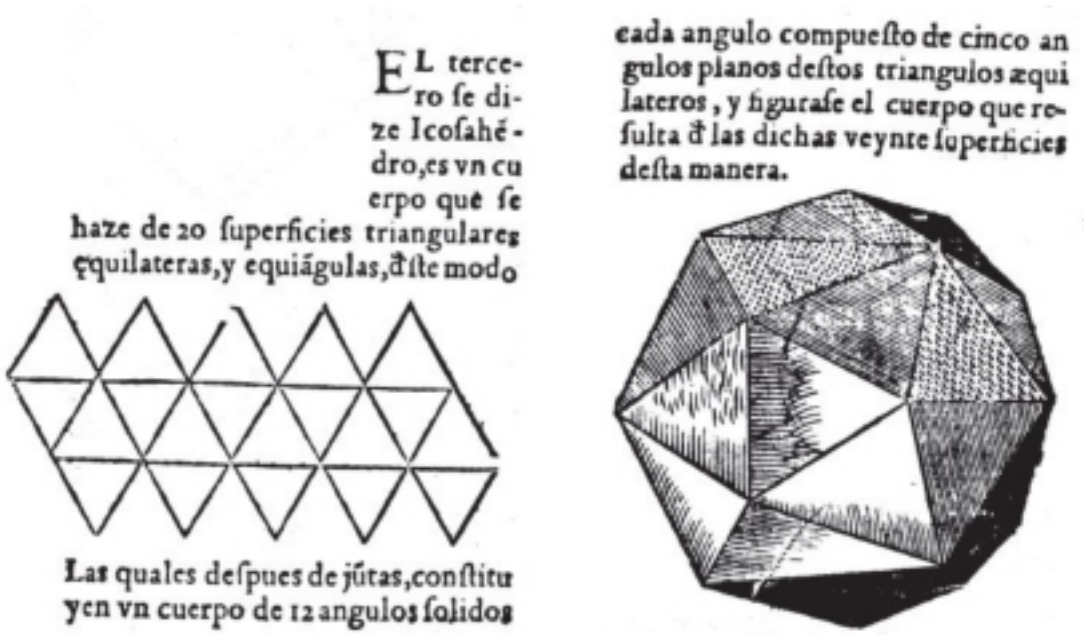
Esqueleto del cubo con palillos y plastilina

4. Alberto Durero y sus «desarrollos» de poliedros


1493



Para el poliedro semirregular [5] de los cinco *sólidos platónicos* (Tratado de Geometría, Para el poliedro semirregular [5] de los cinco *sólidos platónicos* (Tratado de Geometría,



EL tercero ſe dize Icoſahédro, es vn cuerpo que ſe haze de 20 ſuperficies triangulares equilateras, y equiángulas, deſte modo

Las quales deſpues de jũtas, conſtituyen vn cuerpo de 12 angulos ſolidos cada angulo compueſto de cinco angulos planos deſtos triangulos æquilateros, y figurafe el cuerpo que reſulta de las dichas veynte ſuperficies deſta manera.

5. Clairaut y la tarjeta rectangular



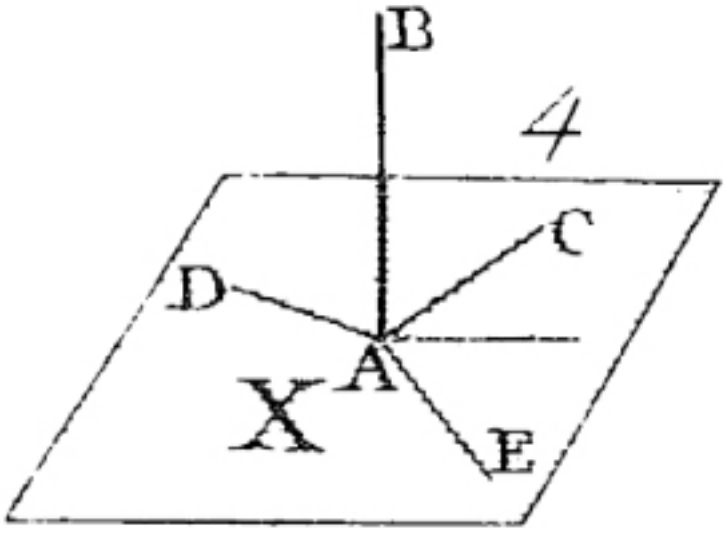
Alexis Claude Clairaut (1713 – 1765)

El matemático francés Alexis Claude Clairaut [6] , en la cuarta parte (*De la manera de medir los sólidos y sus superficies*) de sus *Elementos de Geometría,* introdujo un sencillo material didáctico, una tarjeta rectangular dividida en dos partes iguales, para explicar los conceptos y procedimientos relativos a la perpendicularidad recta-plano y plano-plano, paralelismo de planos y medida del ángulo determinado por dos planos.

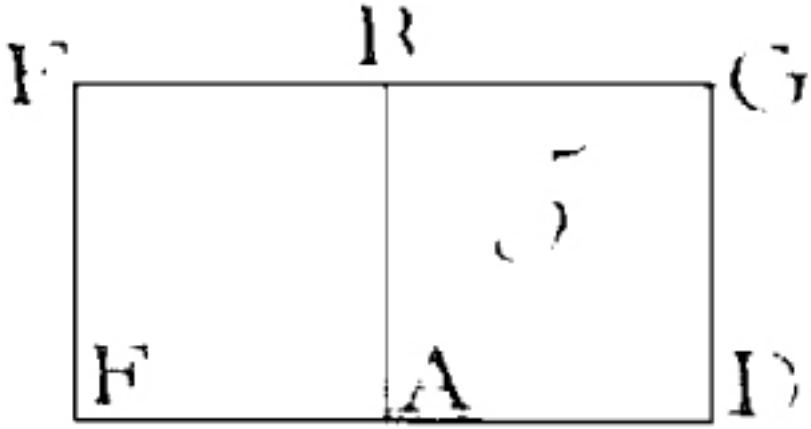
Dado su interés pedagógico, reproducimos *in extenso* la adaptación al castellano del texto original.

VI

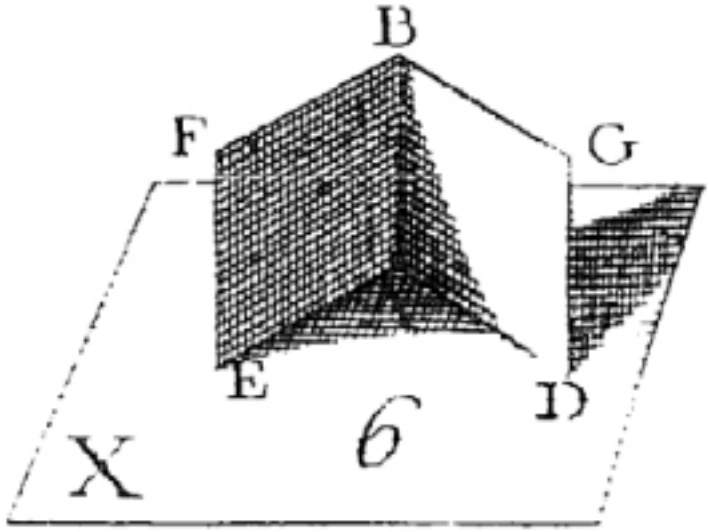
De ello se sigue que la línea AB, perpendicular al plano X, debe ser perpendicular a todas las líneas AC, AD, AE etc. que parten del pie A de esta línea y están contenidas en dicho plano. En efecto, si AB se inclinase sobre una de estas líneas, entonces se inclinaría hacia algún lado del plano, por lo que no sería perpendicular a él.



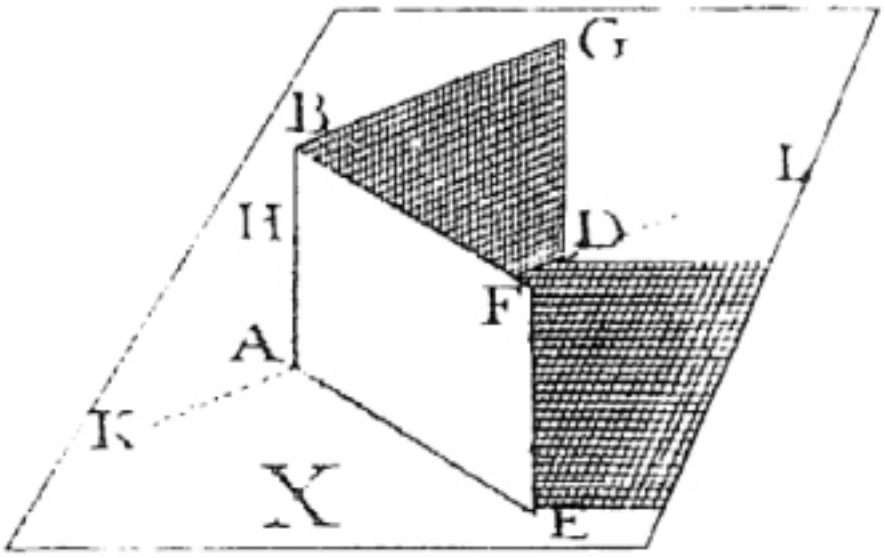
[illegible] por cualquier lado todas las

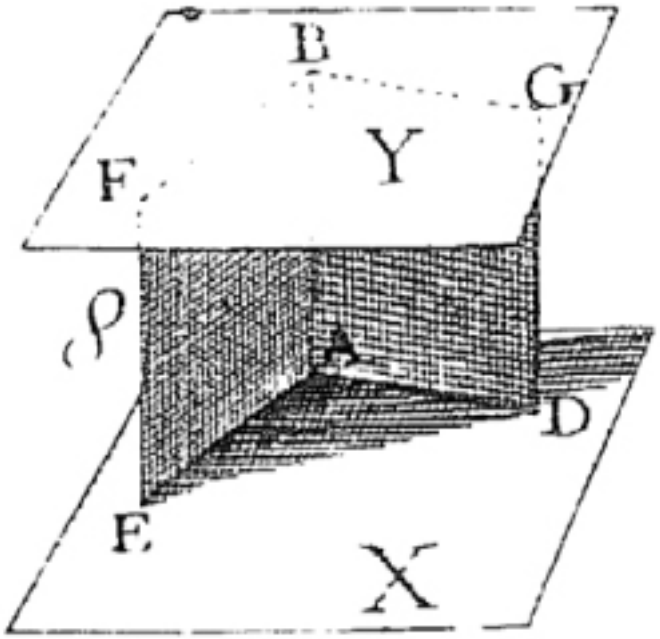


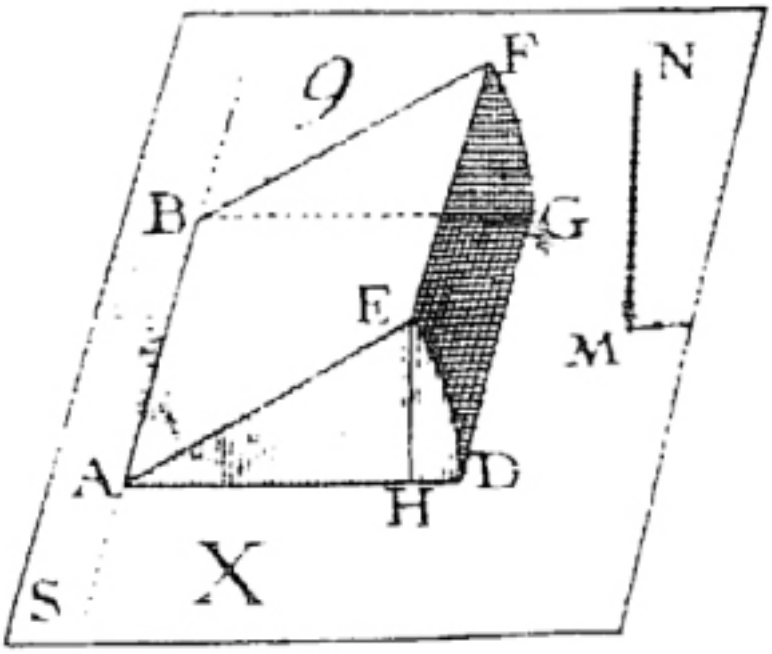
[illegible] lados AB y los lados EF y FG del rectángulo



[illegible]


G
B
L
H
D
F
A
K
X
E


B
G
F
Y
ρ
A
D
E
X



6. A modo de resumen

En este artículo que está a punto de concluir hemos ofrecido algunas noticias históricas relativas al uso de material didáctico manipulativo en la enseñanza y aprendizaje de la Geometría.

Ordenadas cronológicamente son las siguientes:

- **1495.** En el *Retrato de Luca Pacioli* se pone de manifiesto que a finales del siglo XV, los profesores italianos ya utilizaron modelos de poliedros en sus clases de Geometría.

- **1509.** En el libro *De Divina Proportione* de Luca Pacioli, Leonardo da Vinci publica las primeras ilustraciones de los esqueletos de cuerpos geométricos.

- **1525.** Alberto Durero, en su *Underweysung der Messung, mit dem Zirckel und Richtscheyt* publica, por primera vez, los desarrollos planos de algunos poliedros.
- **1561.** En el *Retrato de Johannes Neudofer y su hijo* se asegura que, a mediados del siglo XVI, algunos «maestros de cálculo» se sirvieron de los esqueletos de poliedros para explicar determinados objetos geométricos 3D.

- **1562.** En su *Arithmetica Practica, y Speculativa*, el bachiller Juan Pérez de Moya nos ofrece un material didáctico compuesto por tablas de cajero para demostrar una interesante propiedad de las figuras isoperimétricas.

- **1573.** En su *Tratado de Geometria Practica, y Speculativa*, Pérez de Moya se sirve de los desarrollos de los *sólidos platónicos* para construir y describir dichos poliedros regulares.

- **1775.** El matemático francés Alexis Claude Clairaut, en sus *Élémens de Géométrie*, utiliza una tarjeta rectangular para explicar conceptos y procedimientos relativos a las posiciones relativas de una recta y un plano, y de dos planos.

Este reducido catálogo de carácter histórico-didáctico podría ser el principio de una línea de investigación en Educación Matemática en la que, utilizando diversas fuentes (libros, pinturas, etc.) se identifiquen: (*i*) los creadores de los materiales didácticos para la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, y (*ii*) los documentos (gráficos o escritos) en los que, de forma explícita, se certifique la presencia de dichos materiales en la práctica docente.

Desde aquí animamos a los enseñantes e investigadores para que se involucren en esta tarea que, sin duda alguna, repercutirá en el aprendizaje de los alumnos de todos los niveles educativos.

Referencias bibliográficas

CLAIRAUT, A. C. (1775). *Élémens de Géométrie.* Paris: Cellot & Jombert.

DURERO, A. (1525). *Underweysung der Messung, mit dem Zirckel und Richtscheyt.* Nürnberg.

MEAVILLA SEGUÍ, V. (2017). *Aprendiendo matemáticas con los grandes maestros*. Córdoba: Editorial Guadalmazán.

PACIOLI, L. (1991). *La divina proporción* (Introducción de Antonio M. González. Traducción de

Juan Calatrava). Madrid: Ediciones Akal, S. A.

PÉREZ de MOYA. J. (1562). *Arithmetica Practica, y Speculativa*. Salamanca: Mathias Gast.

PÉREZ de MOYA. J. (1573). *Tratado de Geometria Practica, y Speculativa*. Alcalá: Juan Gracian.

Referencias online

MEAVILLA SEGUÍ, V. y VICÉN ANTOLÍN, C. (2008). Los *Elementos de geometría* de Alexis Claude Clairaut
(1713 – 1765).

---

[1] Los datos disponibles sobre la vida del bachiller Juan Pérez de Moya son escasos e inciertos. Nació antes de 1513, probablemente en 1512, en Santisteban del Puerto (Jaén), tal como se indica en la portada de algunos de sus libros. Estudió en Salamanca y Alcalá de Henares, no fue profesor universitario pero posiblemente se dedicó a la enseñanza de las Matemáticas. En 1536 obtuvo una capellanía en su pueblo natal y, ya muy mayor, fue canónigo de la Catedral de Granada, ciudad en la que murió en 1596.

[2] Luca Pacioli (1445 – 1517) nació en Borgo de Sansepolcro (Italia) y posiblemente recibió sus primeras lecciones en el taller de su paisano Piero della Francesca (1412 – 1492). En 1492 ingresó en la orden de San Francisco de Asís. Entre sus obras de carácter matemático destacan *Summa de arithmetica geometría proportioni et proportionalità* (1494) y *De divina proportione*
(1509).

[3] *De Divina Proportione* se acabó el 14 de diciembre de 1498 y se realizaron tres manuscritos. Se imprimió en 1509.

[4] Esqueleto de un poliedro es la estructura 3D formada por todas sus aristas.

[5] Poliedro arquimediano con catorce caras (seis triangulares y ocho hexagonales).

[6] Alexis Claude Clairaut fue admitido en la Academia de Ciencias francesa cuando aún no tenía dieciocho años, por su trabajo *Recherches sur les courbes a doublé courbure* que se publicó en 1731. A lo largo de su corta vida también perteneció a la Royal Society of London, a la Academia de Berlín, a la Academia de San Petersburgo, y a las Academias de Bolonia y Upsala.

Desde el 20 de abril de 1736 al 20 de agosto de 1737, participó en una expedición a Laponia, liderada por Maupertuis, cuyo objetivo era medir la longitud de un meridiano. En 1743, publicó su famoso trabajo *Théorie de la figure de la terre* donde confirmó la hipótesis de que la Tierra estaba achatada por los polos, defendida por Newton-Huygens.

Además de sus contribuciones a la ciencia en general y a las Matemáticas en particular, Clairaut escribió dos textos dedicados a la enseñanza que alcanzaron varias ediciones: uno de Álgebra y otro de Geometría (*Élémens de Géométrie*).