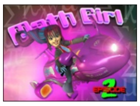
Un nuevo año suele ser un buen momento para proponerse nuevas metas, gracias a la recarga de energías que proporciona el turrón y al cargo de conciencia de no haber hecho nada en vacaciones. Nosotros, algo más modestos, nos conformamos de momento con seguir con la tarea iniciada y terminar lo que estaba pendiente. Retomamos así a Math Girl, la chica matemática, heroína concebida motivar a los alumnos USAmericanos en conceptos teóricamente difíciles de asimilar (para ellos).

El segundo capítulo de la trilogía puede verse en versión original en http://es.youtube.com/watch?v=Ceui-CIQZe4 . Basa su argumento en el límite

. El capítulo fue producido por el *Interdisciplinary Research in Mathematics and Computational Sciences Centre* (IRMACS) de la Universidad Simon Fraser. Después de verlo, lo comentamos.



Episodio 2.- **La discontinuidad de Cero Factorial** (*Zero!'s Dis-Continuity*, 2006). (Duración: 5:14).

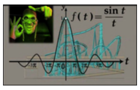
Tras los títulos aparece un rótulo que reza: Población de Calculópolis:

$$[\pi^2]\exp\left(\frac{(2006-1777)\ln 2}{10\sqrt{2}}\right)$$

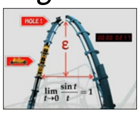
Math Girl se encuentra tomando un refresco en una mesa de la terraza del Café Cauchy. Su amigo Pat pasa por allí.

Math Girl: *¡Hola Pat! ¿Dónde vas?*
Pat: *Voy a ver si cojo sitio para ver la Olimpiada Matemática Internacional.*
Math Girl: *¡Espera, Pat, estoy recibiendo una señal de alarma en mi teléfono- televisión! ¡Mira! ¡Es BigMath, el regidor de Calculópolis!*

Pat: *¡Oh, no! ¡Ahora no!*
BigMath: *Math Girl, en el nombre de Gauss, necesitamos tu ayuda inmediatamente. Son mis chicos, los gemelos, en el parque de diversión de las funciones salvajes. ¡Socorro!*



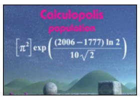
Zero!: *Apartaré a los chicos del poder y gobernaré yo mismo en Calculópolis con mi invención malvada más reciente, la montaña rusa sent/t. El genio total que hará que los gemelos no puedan resistir la vuelta estremecedora. ¡Idiotas! Deberían haber estado más tiempo en clase. Parece (la montaña rusa) bonita y suficientemente suave como le gusta a la gente de Calculopolis. Pero, ¡sorpresa, sorpresa! Hay un agujero en su parte superior. No saben que la división por cero no está permitida. ¡Ah, Ah, Ah! Aprenden la lección cuando se hunden en su destino.*
Math Girl y Pat: *¡Invocamos el poder de Newton y Leibniz, los creadores del Cálculo!*
Math Girl: *¡Pobres niños, no es culpa suya! Ellos no saben que cero entre cero es una indeterminación. Tenemos que salvarlos.*
Pat: *¿Qué podemos hacer?*
BigMath: *Date prisa, Math Girl, Zero! ha puesto en marcha la montaña rusa sent/t. Los niños llegarán al agujero en 4.5 minutos.*



Math Girl: *Tengo un plan. ¡Taparemos el agujero! Como el limite de sent/t cuando t tiende a cero es igual a 1, se trata de una discontinuidad evitable.*
Pat: *¡Eso es brillante, Math Girl!*
Gemelos: *¡Esta parte es tan divertida! Confiemos que no descubran que nos hemos pirado la clase. No se da cuenta (se refieren a BigMath) de lo que hacemos porque está demasiado ocupado regulando cómo cuidarnos.*
Math Girl: *Asegúrate de que pones en marcha el mecanismo epsilon-delta.*
Pat: Roger, ¿es bueno que sepas Cálculo, verdad?
Math Girl: *Mi aparato epsilon-delta me dice que si el tiempo es menor que 1.0024, entonces la distancia vertical entre el carrito y el agujero es menor que 0.15. Deprisa, necesitamos coger el trozo perdido de nuestra recta real de recambio.*
Pat: *¡Hagamos rock and roll!*
Gemelo 1: *Hey, hermanita, ¿ves ese agujero? ¿No ves que no hay nada allí?*
Gemelo 2: *¡Tienes razón!*
Zero!: *¿Cómo osáis eliminar mi discontinuidad? ¡Volved con Math Girl! ¡Os las veréis con lo último de Zero!!*
BigMath: *Gracias, Math Girl y Pat. Vuestro súper conocimiento del Cálculo ha salvado a mis gemelos y ha neutralizado el malvado plan de Zero! ¡Niños, yo estaré ocupado cuidando de Calculópolis, pero lo sois todo para mí! Si hubierais estado en clase y prestado más atención ….*
Gemelos: *… hubiéramos sabido que no es posible dividir por cero. Lo sentimos, papá. No deberíamos haberlo hecho. Math Girl, ¿podemos dar una vuelta en tu bicicleta de aire?*
Math Girl: *¡Desde luego!*
Pat: *Os llevaremos de vuelta a la clase de matemáticas.*

Comentarios y Discusión

Al igual que sucediera en el primer episodio, se nos facilita el número de habitantes de Calculópolis, observando que ha aumentado considerablemente (55000 millones frente a los escasos 42 del capítulo previo).



En realidad lo único que parece pretenderse (se me ocurre a mí, no lo he visto escrito en ninguna parte) es incluir números o fechas de unas características concretas. En este caso aparecen el número trascendente π, el 10 (base de nuestro sistema de numeración), las funciones exponencial, logarítmica (ln 2), raíz cuadrada y potencial cuadrática, el irracional √2, el año de producción del episodio (2006), el año de nacimiento de Gauss (1777; a este matemático alude BigMath en su primer comentario), y además del 2 el número primo 229 (2006 – 1777). No se me ocurre otra explicación acerca de esta cantidad.

Respecto a matemáticos ilustres, se mencionan aparte del citado, a Cauchy (dando nombre a un Café), y Newton y Leibniz, (designados como *los creadores del Cálculo*; quizá sea mucho decir, sin restarles mérito alguno por supuesto, pero el propio Newton reconoce la labor de sus predecesores en este asunto en la famosa frase que todos recordaréis. Lo digo porque tratándose de un cartoon didáctico, la afirmación no resulta demasiado rigurosa). Obviamente se invoca a éstos puesto que el asunto a resolver se enmarca tradicionalmente dentro de esta rama de las Matemáticas.

Un nuevo personaje aparece en este episodio: el malvado ***Cero Factorial*** (0!). Ciertamente a cualquier estudiante o persona que se acerque a las matemáticas, le choca el convenio 0! = 1 conocida la definición del factorial. Recordemos que ***el factorial de un número*** natural n es el número que resulta de multiplicar n por todos los números naturales menores que él (esto es, n! = n(n–1)(n–2) …. 3 · 2 · 1). Su utilización es imprescindible en combinatoria y probabilidades. ¿La razón? El factorial de n expresa el número de formas distintas en que pueden colocarse n objetos (recuérdese también que esto es calcular el número de ***permutaciones*** que pueden realizarse con esos objetos).

Pero, ¿por qué 0! = 1? De lo dicho, no parece que tenga mucho sentido plantear el factorial de cero, puesto que no hay ningún número natural menor que cero (según qué autores el cero no se considera natural, sino entero; a mí siempre me definieron al uno como el primer natural, y así lo considero y explico, ya que, a mi entender y valga la redundancia es lo más “natural”). Muchas expresiones en las que aparecen los factoriales se definen de manera recurrente, es decir, teniendo en cuenta los valores previos. Por ejemplo, n! = n (n–1)! Al ir a calcular 1! nos aparece 0! (salvo que tomemos la expresión para n > 1). Si no convenimos que 0! = 1, no obtenemos el 1! Y sin este tampoco podemos calcular 2!, etc., etc. Por tanto parece razonable utilizar ese convenio que pone en marcha todo el proceso. Esto se entiende perfectamente cuando queremos introducir estas fórmulas en un lenguaje de programación.

Martin Gardner, dedica el cuarto capítulo de su *Mathematical Magic Show* (*Festival Mágico-matemático*, en castellano, editado por Alianza Editorial) a comentar algunas curiosidades factoriales. De allí os propongo la siguiente cuestión que me ha resultado llamativa: Platón, en el *Libro V* de sus *Leyes*, propone que 7! (= 5040) es el número ideal de habitantes de una población, ya que ese número admite 60 divisores diferentes, cantidad interesante desde el punto de vista de posibles repartos, divisiones, etc. Sin embargo no es el número de cuatro cifras con mayor número de divisores. ¿Cuál sería ese número? ¿Y con cinco cifras? La forma razonable que se me ocurre para dar respuesta a estas cuestiones pasa por hacer un pequeño programita que nos de la respuesta, pero si a alguien se le ocurre otro modo menos pedestre, que nos lo cuente.

Otra expresión curiosa y útil con los factoriales es la conocida como ***fórmula de Stirling*** (en honor al matemático escocés ***James Stirling***, 1692 – 1770, aunque al parecer fue ***Abraham de Moivre*** el primero en publicarla, en 1730, en su forma casi definitiva, con demostración incluida. Stirling publica algunos meses después una mejora de la fórmula con un desarrollo asintótico con cinco términos. De Moivre y Stirling eran buenos amigos, y conocer las contribuciones exactas de cada uno no es fácil.):

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

Mucho cuidado con el símbolo de aproximación que probablemente más de uno meterá la pata. Las dos expresiones que aparecen separados por ese símbolo son valores que tienden a infinito cuando n tiende a infinito. Esa aproximación simplemente indica que ambos infinitos son equivalentes, es decir que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}} = 1$$

lo cual es extremadamente útil en el cálculo de algunos límites en los que interviene el factorial. Pero ese comportamiento similar “cuando n es lo suficientemente grande” como se indica en muchos sitios, no implica que aproxime como desearíamos el factorial de un número concreto.

La fórmula de Stirling también se escribe como $\ln n! \sim n \ln n - n$ (es fácil ver que es la misma expresión que la mostrada arriba tras tomar exponenciales)

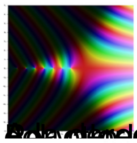
El factorial de n puede generalizarse a cualquier número real positivo mediante la ***Función Gamma***

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty t^n e^{-t}\, dt = n!$$

La notación Γ fue ideada por ***Adrien-Marie Legendre*** (1752 – 1833). La función Gamma aparece en funciones de distribución de probabilidad, por lo que es bastante usada tanto en probabilidad y estadística como en combinatoria. Entre sus propiedades citaremos que verifica la ecuación funcional $\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n)$ (obsérvese que esta propiedad es precisamente la que define el factorial para valores naturales) y que está estrechamente relacionada con otra función esencial del Análisis Matemático, la
función zeta de Riemann
, $\zeta(s)$:

$$\zeta(s)\,\Gamma(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}\, dx$$

donde $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$
, para $s > 1$, es dicha función zeta.



$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{\text{sen } t}{t}, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases}$$

área triángulo COA

Tomando inversos