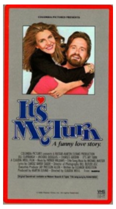
Conviene de vez en cuando volver a echar un vistazo a algunas películas del pasado. A veces encontramos algunas sorpresas. Pero también en algunas muy recientes sigue apareciendo algún que otro matemático.



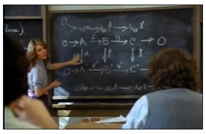
En esta ocasión recordaremos ***Ahora me toca a mí*** (*It´s my turn*, Claudia Weil, EE. UU., 1980), que desde luego no pasará a la posteridad como una de las mejores películas de la historia, cinematográficamente hablando, pero sí merece un lugar muy destacado en cuanto a las matemáticas que encierra.

La película no es muy conocida, ha sido pocas veces emitida por televisión, es difícil de localizar, y en conjunto, como acabo de comentar, es más bien mediocre, pero es la única en la que se enuncia completamente un teorema y se demuestra con todo detalle, al punto de haber sido referenciada por textos específicos de ***álgebra homológica***.

Jill Clayburgh interpreta a Kate Gunzinger, una profesora universitaria de matemáticas un tanto despistada y avasallada por casi todo el mundo que decide en un momento dado tomar sus propias decisiones harta de tener que ceder siempre (de ahí el título de la película). Vayamos con las escenas que nos interesan.

Paralelamente a los títulos de crédito y al padecimiento de una de las bandas sonoras más machaconas y omnipresentes que jamás hayamos oído, Kate se dirige a una de sus clases en la Universidad. Se le caen algunas cosas al suelo, vuelve sobre sus pasos como si se le hubiera olvidado algo..., detalles que definen a una persona bastante insegura y serán constantes a lo largo de todo el metraje. En la siguiente escena aparece en un aula explicando la demostración del conocido como ***lema de la serpiente*** de álgebra homológica en una pizarra frente a un reducido grupo de alumnos. Uno de ellos, Stanley Cooperman, el listillo de la clase, no hará otra cosa que levantar la mano para mostrar su desacuerdo (y hacerse notar) e interrumpirla sin dejarla prácticamente hablar con comentarios fuera de lugar.

Reproduzco el diálogo que mantienen en la versión doblada al castellano (en el libro ***Las matemáticas en el cine***
, Proyecto Sur de Ediciones 2006, aparece también la versión original en inglés del mismo):


Kate: *Dejadme mostraros cómo construir la aplicación S que es lo más divertido del lema. Supongamos que tenemos un elemento en el Ker γ, es decir, un elemento en C, de modo que γ lo lleva a cero en C'. Podemos volver a B vía la aplicación g que es suprayectiva.*

En ese momento se produce la primera interrupción de Cooperman (en la foto el alumno que se ve de espalda).

Cooperman: *¡Un momento, un momento! No es la única solución*.
Kate prosigue su explicación como puede.
Kate: *Lo es, Sr. Cooperman*, (enlazando con la explicación anterior)…*hasta llegar a un elemento en la imagen de f, ¿de acuerdo? Entonces volvemos a un punto fijo b aquí*
(señala a B).
Tomando β de b, llegamos a cero en C' por la conmutatividad del diagrama. Está por tanto en el núcleo de la aplicación g'
(el alumno hace gestos negativos con la cabeza),
y por ello en la imagen de f ' por la exactitud de la sucesión inferior ...
Cooperman: *¡No!*
Kate: ...*podemos retroceder*...
Cooperman: *¡No!*
Kate: ...*a un elemento de A'*...
Cooperman: *¡No está bien definido!*
Kate: *Está bien definido gracias a la imagen de α. Y define un elemento en Coker α. Esta es la serpiente* (dibuja una flecha en el diagrama, desde Ker γ hasta Coker α). *Y el lunes, si les parece bien, apagaremos la teoría de grupos y las consiguientes objeciones del Sr. Cooperman*
(levanta la pizarra, los alumnos se van y se queda sola con Cooperman recogiendo sus libros y ella limpiándose las manos y colocándose unas pulseras en sus manos).
Cooperman: *Todo esto no son más que chorradas; parecen mapas de carreteras. ¿Cuándo vamos a hacer algo interesante, como su particular teoría de grupos? ¿Algún progreso en su nuevo proyecto?*
Kate: (sonriendo forzadamente) *No; estoy estancada*.

Cooperman: *Quizá con su método no sea posible llegar a una solución definitiva*.
Kate: (un tanto perpleja) *¿Usted cree?*
Cooperman: *Yo lo estoy intentando desde un ángulo totalmente nuevo. Y si da resultado, ..., seré famoso.*
Kate: *Eso sería fantástico, me escalofría pensarlo. Yo sería famosa por haberle enseñado*
(cada uno sale por una puerta diferente del aula)
¡Gilipollas!
(en voz baja).

Si la película fuera española y ese fuera el diálogo, estaríamos de acuerdo con Cooperman, ya que en el doblaje se han omitido unas cuantas palabras clave en la demostración del resultado. Sin embargo en la versión original está perfecta y claramente descrito. Describamos el resultado desde el principio y su correspondiente demostración:

Lema: Se considera el siguiente diagrama conmutativo en una categoría abeliana

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "f'"] & B' \arrow[r, "g'"] & C' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde las filas son sucesiones exactas. Existe entonces una sucesión exacta

0 → Ker α → Ker β → Ker γ → Coker α → Coker β → Coker γ → 0.

Notas:

1.- La categoría de la que se habla en la película es la de **grupos abelianos**, pero el resultado es igualmente válido para módulos sobre un anillo, o para espacios vectoriales sobre un cuerpo.

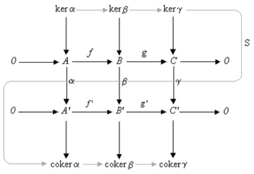
2.- Recordemos (aparece también en la pizarra de la película en un margen) que una sucesión

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$$

es exacta si, y sólo si, la imagen de cada una de las cuatro aplicaciones coincide con el núcleo de la siguiente. De esta condición se deduce que la sucesión es exacta, si y sólo si, f es inyectiva, g es suprayectiva y g induce un isomorfismo de Coker(f) = B/f(A) sobre C.

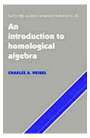
Las aplicaciones entre los núcleos y los conúcleos se inducen de manera natural de las aplicaciones horizontales gracias a la conmutatividad del diagrama. La exactitud de esas dos sucesiones inducidas se sigue de forma directa de la exactitud de las filas del diagrama original. El punto importante del lema es cómo conectar el Ker γ con el Coker α (a esa aplicación la llamaremos S).

Repasemos la demostración. Sea x ∈ Ker γ ⊂ C. Como g es suprayectiva, existe un b ∈ B tal que g(b) = x. Por la conmutatividad del diagrama (g' · β = γ · g), g'(β(b)) = γ(g(b)) = γ(x) = 0 (porque x ∈ Ker γ), o sea que β(b) ∈ Ker g'. Como la sucesión inferior es exacta, Ker g' = Im(f '), es decir, existe y ∈ A' tal que f '(y) = β(b).
Se define entonces S(x) = y + Im α.



Queda para el lector interesado la prueba que tanto demanda el alumno Cooperman, es decir que S está bien definida (o sea que S(x) sólo depende de x y no de las elecciones de b y de z), y las demostraciones de que S es un homomorfismo y que la sucesión resultante es exacta. En ningún caso es demasiado complicado; basta tener un poco de paciencia para escribirlo todo correctamente.

Hace años el **álgebra homológica** no era una materia atractiva: demasiado formalismo, aburrida y poco útil para todos aquellos que no se dedicaran a la **topología algebraica**. Hacia 1958 esta actitud cambió cuando Serrre la utilizó para la caracterización de anillos regulares locales y utilizó este criterio para demostrar que cualquier localización de uno de estos anillos es asimismo regular (hasta entonces sólo se conocían casos particulares). Casi a la vez se logró demostrar (Auslander y Buchsbaum) que todo anillo regular local es un *dominio de factorización única*. Con el tiempo, al ampliarse el campo de aplicación del álgebra homológica, ésta se ha ido convirtiendo en una parte necesaria dentro de la formación de los licenciados en matemáticas, aunque su enseñanza sigue siendo dificultosa para el profesor por la pesadez de sus definiciones y la escasez de sus aplicaciones. Esta situación es la que trata de reflejar esta escena de la película que, justo es reconocerlo, está perfectamente documentada.

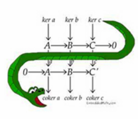


Charles A. Weibel, profesor de la Universidad de Rutgers en su libro *An Introduction To Homological Algebra*, cuya segunda edición fue publicada en octubre de 1995 por Cambridge University Press, afirma al describir en el libro este resultado que "*no se incluye la demostración del teorema de la serpiente porque lo mejor es visualizarla. De hecho, una prueba bastante clara es la mostrada por Jill Clayburgh al inicio de la película "Ahora me toca a mí*".

En internet, dicha secuencia puede verse (en inglés) en el enlace

www.math.harvard.edu/~Knill/ ...

En los EE. UU. se comercializan gorras, jarras, camisetas, relojes, pins y demás *merchandising* con dibujos relativos a teoremas varios (no deja de ser un modo de recordarlos). A modo de ejemplo véanse los modelos para el lema de la serpiente y el de la mariposa de Zassenhaus, ambos de álgebra homológica:



Al llegar a casa, Kate le cuenta a su compañero Homer (Charles Grodin) el incidente con el alumno. Él es un arquitecto muy atareado tanto con su trabajo como con sus deberes de custodia temporal de sus hijos (está divorciado), y no le hace mucho caso. En la cama, un poco más relajados, Kate garabatea demostraciones matemáticas en la parte de atrás del sobre de una carta (esto de resolver o pensar problemas de matemáticas en cualquier espacio libre del papel que se encuentre más a mano, por pequeño que sea en lugar de ir a buscar un folio en condiciones, seguramente os resultará familiar). Su compañero le sugiere que lo deje, a lo que ella, pensando en lo suyo, le contesta que alcanzaría una consideración similar a Euclides o Newton si lograra resolver el problema que se trae entre manos. (Nada menos que el de la ***cla sificación de los grupos simples***
). Ella misma añade a continuación:
"¡Claro que Newton hizo sus descubrimientos a los 22 años!"
. (Tema muy discutido y un tanto polémico: son muchos los que piensan que, salvo raras excepciones, ningún matemático descubrirá nada relevante pasados los treinta años de edad. Las
medallas Fields
sólo se conceden a menores de 40 años)

Lo cierto es que Kate tiene además dos problemas añadidos: decidir si aceptar un trabajo administrativo en Nueva York mejor pagado que sus clases, y asistir a la boda de su padre con una mujer que no le cae nada bien. Finalmente se desplaza allí para cumplir con ambos cometidos. A la salida de la entrevista de trabajo, charla con los matemáticos que le han informado sobre el mismo. Uno de ellos le confiesa la admiración que siente por su tesis doctoral y la pregunta si ha avanzado algo en sus investigaciones. Conocida la respuesta, este profesor la confiesa, "*me volví loco con la teoría de grupos*", y a continuación le dejan bien claro que si acepta el trabajo que la proponen, no pueden garantizarla tener tiempo para proseguir con sus investigaciones.

Horas después, Kate asiste a una cena familiar previa a la celebración de la boda de su padre, en la que se presentan los familiares y amigos más allegados. Llega tarde, y para no variar, tropezándose y metiendo la pata en algunos momentos. Su padre la presenta a los demás con orgullo como uno de los mejores expedientes de su promoción: "*Consiguió matrícula de honor en todos los exámenes preuniversitarios excepto en geometría plana. Su tesis tenía que ver con los conjuntos esporádicos*
". (De nuevo una traducción incorrecta: el original dice claramente "
grupos esporádicos
"). A renglón seguido, Jerome (Charles Kimbrough), un psiquiatra bastante repelente, se interesa, más por morbo que por otra cosa, por la razón por la que no tuvo matrícula en geometría plana. Kate responde: "
En el problema había que calcular el área de un patio alrededor de una piscina y apliqué el método correcto, pero coloqué el patio dentro de la piscina
(Risas de ella y sonrisita forzada de Jerome).
Eso no me ocurriría ahora. Vivo con un arquitecto
". Como en otrtas ocasiones vuelve a aparecer el manido tópico que coloca a los matemáticos como buscadores de la solución perfecta que no sirve para nada.

De vuelta a casa, después de un romántico fin de semana con el hijo de su madrastra (un joven Michael Douglas), un destacado jugador de béisbol retirado por una lesión, se encuentra con Homer, que lleva a sus hijos a casa de su ex mujer. Uno de ellos al ver a Kate le dice, "*El número primo, ¿no es aquel que sólo puede ser dividido por sí mismo y por la unidad*
?" Kate le va preguntando sucesivamente si el 2 y el 3 lo son, respondiendo el niño afirmativamente. Al llegar al 4, el niño lo niega porque "
es 2 por 2
". Todo ello, mientras su padre va arrastrándolo hacia el coche.

Finalmente, al día siguiente, el pesado alumno Cooperman asalta a Kate nada más aparecer por el campus

Cooperman: *¿Ha hecho algún progreso*?
Kate: *Creo que me equivoqué en cuanto al enfoque. Tengo unas ideas nuevas sobre el proyecto* .
Cooperman: *¿Se refiere a la transición del punto cero al punto G?*
Kate: *Sí, en el caso más sencillo.*
Cooperman: *Sí, quizá funcione. Es posible que la clasificación desaparezca. Enseguida llegará al cociente. Es inmediato* . (muy alterado) *Demuéstremelo.*
Kate (con prudencia): *Es sólo el principio. Lo difícil será demostrarlo*.

Dejando aparte, lo críptico de estas últimas afirmaciones, lo curioso es que en el año de producción de la película, 1980, el problema del que hablan de la ***clasificación de grupos simples*** no estaba resuelto, pero al poco, en 1985, se consiguió, mucho antes de lo que se esperaba. El asesoramiento matemático de la película corrió a cargo de Benedict H. Gross (no aparece en los títulos de crédito), profesor de la Universidad de Harvard, especialista en teoría de números, responsable junto a Don Zagier del ***teorema de Gross-Zagier*** *acerca de L-funciones sobre curvas elípticas*. Así pues su labor de documentación no sólo fue excelente sino premonitoria.

El teorema de clasificación establece cinco tipos diferentes para cualquier grupo simple finito, entre los que están los grupos cíclicos de orden primo, algunas clases de grupos de Lie y los grupos esporádicos (de los que existen 26 variedades), de los que habla la película. Este teorema contiene unos 100 teoremas individuales y su demostración completa ocupa 15.000 páginas por lo que se le conoce también como el ***teorema enorme***. Y no son nada gratuitas las afirmaciones de los protagonistas sobre la importancia de su deducción, ya que el papel que desempeñan los grupos simples en teoría de grupos, es similar al de los números primos en teoría de números. Cualquier número natural tiene una factorización única en producto de números primos; cada grupo finito puede representarse como producto de un subgrupo normal por un grupo cociente. Así, es posible construir grupos finitos a partir de grupos simples. Por eso el objetivo prioritario de la teoría de grupos finitos fue durante mucho tiempo el dar una clasificación completa de los grupos simples.

Puede parecer extraño que una rama tan abstracta de las matemáticas haya sido elegida como referencia en una película, pero no es un caso único. En ***Antonia*** (*Antonia´s Line*, Marleen Gorris, Holanda, 1995) también el álgebra nomológica es la protagonista de una escena, y curiosamente, también la película está dirigida por una mujer, y también la protagonista que estudia esa materia es del sexo femenino. ¿Hay mas mujeres que hombres dedicándose a esa rama? ¿Simples casualidades? Hala, este mes hemos dado con nuevos enigmas para que los “amantes del misterio” investiguen y rellenen folios y programas radiofónicos y televisivos.

Asuntos más recientes

Hace unos días se ha estrenado ***Revolutionary Road***, (Sam Mendes, EE.UU. y Reino Unido, 2009) presentada como el retorno de la archifamosa pareja Di Caprio-Winslet. En este caso, la película tiene pinta interesante (aún no la he visto), al menos no tan almibarada como la del *Titanic*
.

Uno de los protagonistas esenciales es John Givings (interpretado por Michael Shannon, el de la foto) que encarna a un matemático un tanto desequilibrado (¡cómo no!) pero que es el único (y por ello el público se identifica mucho con su personaje) que se muestra sincero con la pareja protagonista y que les hace ser conscientes de la verdadera realidad de entre todos los hipócritas aduladores que forman parte de su vida.

No hace mucho, en ***El buen alemán*** (*The Good German*, Steven Soderbergh, EE. UU., 2006), otro matemático no menos atormentado, era el origen de parte de la intriga que surgía en el Berlín de finales de la II Guerra Mundial. Pero en ninguno de los casos aparece matemática alguna, sólo un personaje que personifique un determinado rol.

Estos comportamientos distan mucho de la información que aparece en un reciente informe realizado en los EE. UU publicado en enero en el Wall Street Journal. en la que se considera la profesión de matemático como la mejor de entre una lista de unos doscientos oficios y ocupaciones. En el enlace podéis leerlo.

Recordaros finalmente que cualquier petición, sugerencia, crítica o comentario a esta sección podéis hacérmelo llegar a la dirección electrónica que aparece abajo y con mucho gusto trataré de darle cumplida respuesta.