Después de un verano un tanto raro, tanto por la meteorología como por las noticias que se han venido sucediendo, veamos cómo han ido las tareas del verano. Para los que no podais esperar más, al final, la lista de puntuaciones.

Como todos los años teníamos diversas cuestiones tanto de cine como de matemáticas. Tratemos de darlas respuesta del modo más breve pero riguroso que podamos:

1.- Para numerar las nueve primeras camisetas está claro que se necesitan 9 dígitos. Las que van del 10 al 99 (o sea 90 camisetas) necesitarán 90 x 2 = 180 dígitos. Del 100 al 999 (900 camisetas) precisan 900 x 3 = 2700 dígitos. Si vamos recapitulando,

9 + 180 + 2700 = 2889 para componer las primeras 999 camisetas.

Se nos dice que se han utilizado 3917 dígitos, por lo que 3917 – 2889 = 1028 números faltan. Cada nueva camiseta consta de cuatro dígitos. 1028/4 = 257, lo que indica que a partir del 1000 se emplearon 257 dígitos más, por lo que el número final de obreros fue de **1256**.

2.- Una vez resuelta la primera cuestión, sabemos que

N = 12345678910111213.....12551256

Hay varias formas de calcular esta suma. Una de las que habéis indicado es la siguiente:

1ª forma:

Separemos los dígitos de 1 hasta 1256. Desde 1 hasta 1250 tenemos 125 decenas completas.

Cada decena aporta como unidades del 1 al 9, por lo que todas las unidades de los números del 1 al 1256 suman 125*(1 +... + 9) =125*45, más 21 que suman las unidades desde 1251 hasta 1256. En total, 5646.

Por otro lado, desde 0 hasta 1199 contamos doce centenas enteras (el cero no suma nada y lo podemos incluir sin problema), cada una con diez números por cada cifra en las decenas. Todas ellas suman 12*10*45, sin contar 10*(0+1+2+3+4)=100 que aportan del 1200 hasta el 1249 y por último, 5*7 desde 1250 hasta 1256. Sumando obtenemos 5535.

El único millar completo que tenemos, si volvemos a contar el cero, nos da centenas que suman 45*100, más (0+1)*100 de 1000 a 1199 y 57*2 de 1200 a 1256. Todas hacen un total de 4714.

Para terminar, las cifras de los millares sólo suman los 257 unos que aportan del 1000 hasta el 1256.

Recapitulando, las cifras de N suman 5646+5535+4714+257 = **16152**.

2ª forma:

Algunos habéis explicado que existe un algoritmo que nos hace esta operación de sumar los dígitos (Internet nos pone las cosas más fáciles). No es la forma más elegante de hacerlo (se pretende que los concursantes se estrujen un poco las neuronas), pero obviamente se da por bueno también. Se trata de la ***constante de Champernowne*** que puede encontrarse, por ejemplo, en http://oeis.org/A037123

3ª forma

Como paso previo calculemos la suma de las cifras hasta el número 1000. Si escribimos todos

los números del 0 al 999 mediante tres cifras completando con ceros a la izquierda los de una y dos cifras (es decir, 000 – 001 – 002 – 003 – ..... – 010 – 011 – 012 – ..... – 099 – 100 – 101 – ..... – 999) habremos escrito en total 10^3 números, 3×10^3 dígitos. En esta reescritura se utiliza la misma cantidad de veces cada dígito, por lo que cada dígito aparecerá $3 \times 10^3/10 = 3 \times 10^2$ veces. Si sumamos todos los dígitos escritos (nos olvidamos de los ceros obviamente) obtenemos

$$3 \times 10^2 (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) = 3 \times 10^2 \times 45 = 13500.$$

Para sumar los dígitos desde el número 1000 al 1256, podemos contar sencillamente:

- Del 1000 al 1099: 100 unos + la suma de los dígitos de 0 a 99 que es 900, luego 1000
- Del 1100 al 1199: 100 unos + la suma de los dígitos de 100 a 199, luego 1100
- Del 1200 al 1249: 50 unos + 50 doses +45+55+65+75+85, por tanto 475
- Del 1250 al 1256: 7 unos, 7 doses, 7 cincos +1+2+3+4+5+6, es decir, 77

En TOTAL; 13500 +1000 + 1100 + 475 + 77= **16152**

3.- Designemos por x al número de soldados muertos e y al total de soldados, tanto vivos como muertos. De las condiciones del enunciado se tiene que

$$\begin{cases} x = \frac{1}{5} y \\ x + 1 = \frac{1}{4} y \end{cases}$$

cuya sencilla resolución nos lleva a que $x = 4$, $y =$ **20**.

A la misma conclusión han llegado algunos concursantes de un modo mucho más simple: si muriendo un soldado más se pasa del 20% al 25%, cada soldado representa el 5% de la guarnición. Por lo tanto, el número de soldados es de 100 : 5 = 20.

4.- Se dice que los soldados *van cayendo proporcionalmente a los que quedan en pie*. Es decir, la proporción va cambiando,
no es constante
. Por tanto no sirve una sencilla regla de tres, sino que necesitamos involucrar una razón de cambio, es decir, una derivada. Sea

$x(t)$ □ número de soldados vivos en el instante t.

Entonces $x'(t) = \lambda\, x(t)$, con $x(0) = 20$, $x(1) = 16$.

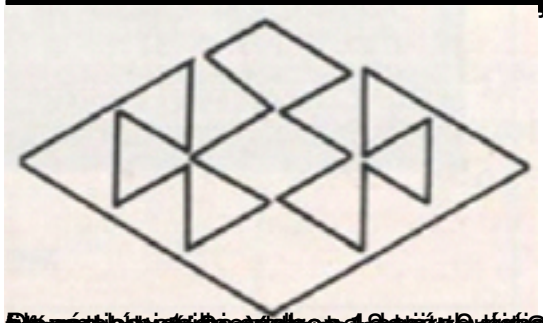
Explicado con palabras, la variación del número de soldados vivos en el momento t es proporcional al número de soldados vivos en ese instante. Inicialmente (momento
t
= 0) hay 20 soldados; al cabo de 5 minutos (
t
= 1) quedan 16 supervivientes, según las condiciones del apartado anterior. Resolviendo la elemental ecuación diferencial anterior (basta pasar dividiendo
x
(
t
) del segundo al primer miembro para tener una ecuación en variables separadas de primer orden con primitiva igual a ln(
x
(
t
)) = λ
t
+ Cte), se obtiene que

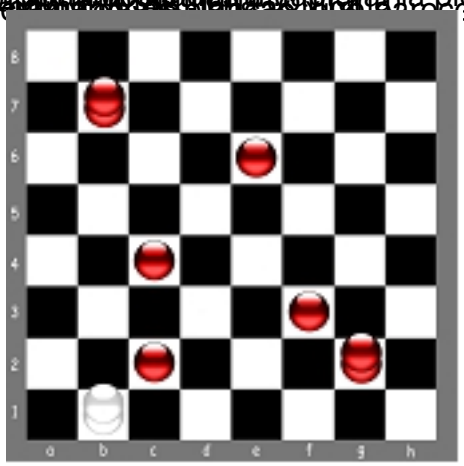
$x(t) = 20$

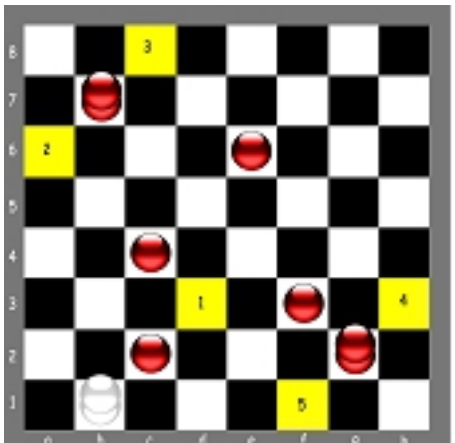
$\left(\frac{4}{5}\right)^t$

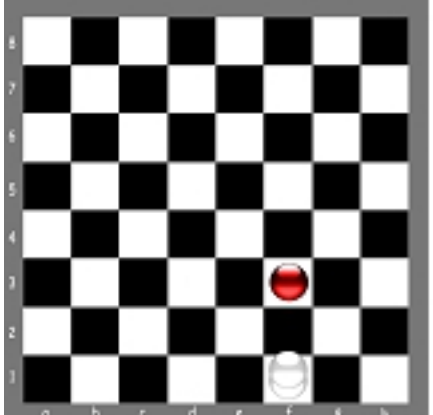
Quedará un solo soldado cuando (1/20) = $\left(\frac{4}{5}\right)^t$

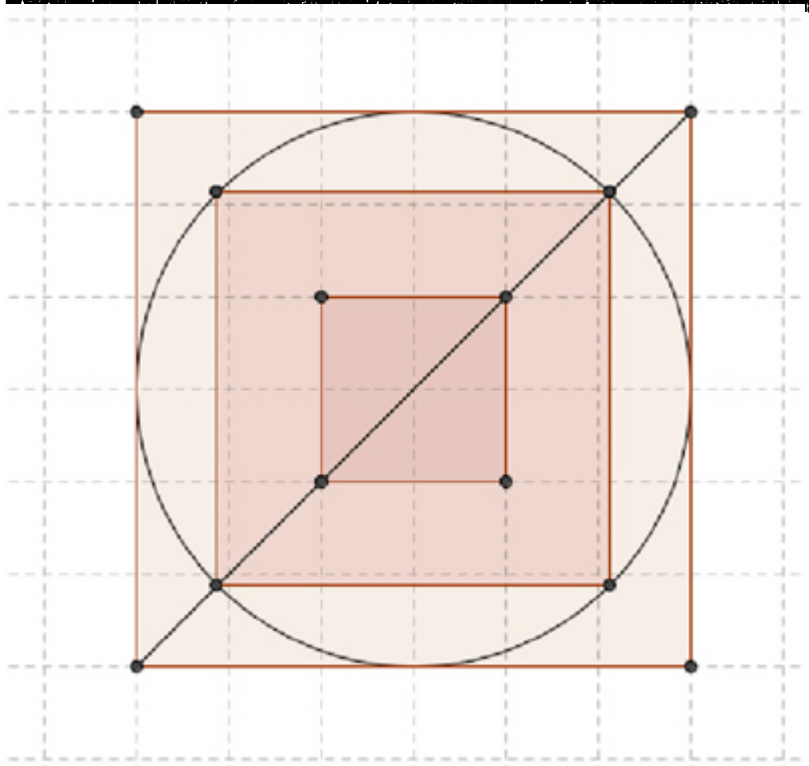
, es decir cuando $t = \frac{\ln 20}{\ln(\frac{5}{4})}$



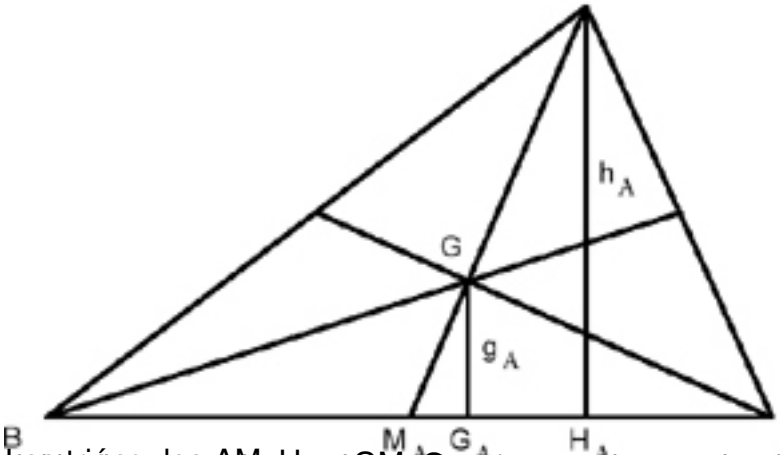



3
2
1
4
5





$\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$



Los triángulos AM_AH_A y GM_AG_A son semejantes siendo la razón de semejanza 3 (propiedad

$$b+c \geq a \Leftrightarrow 2p \geq 2a \Leftrightarrow p \geq a \Leftrightarrow \frac{a}{p} \leq 1$$

multiplicando por h_A y teniendo en cuenta (1) queda:

$$g_A \geq \frac{ah_A}{3p} \Leftrightarrow g_A \geq \frac{2S}{3p}$$

finalmente, como $S = pr$ resulta

$$g_A \geq \frac{2}{3}r$$

Análogamente obtendríamos las correspondientes desigualdades para g_B y g_C .

II) Usaremos la desigualdad

$$x+\frac{1}{x} \geq 2$$

que se deduce de la obvia $(x-1)^2 \geq 0$. (Consideraremos siempre x positivo).

Tomando común:

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right) \geq 6$$

Sumando 3, ordenando y operando resulta:

$$1+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+1+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+1 \geq 9 \Leftrightarrow a\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9$$

sacando factor común, dividiendo por 3 y poniendo $2p = a + b + c$, queda:

$$\frac{2p}{3a}+\frac{2p}{3b}+\frac{2p}{3c} \geq 3$$

Por otra parte, como $3g_a = h_A$; $3g_b = h_B$; $3g_c = h_C$, resulta $2S = 3g_a a = 3g_b b = 3g_c c$

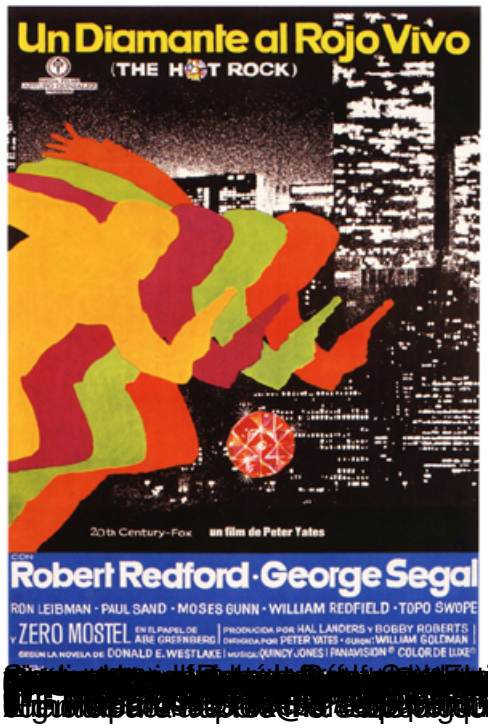
Despejando a, b y c y sustituyendo en (2), queda:

$$(g_a+g_b+g_c)\frac{p}{S} \geq 3$$

Finalmente usando de nuevo $S = pr$, resulta

$$\frac{g_a+g_b+g_c}{r} \geq 3$$

[illegible] no con la mejor, sino con la que vi aquellos años, la de


Un Diamante al Rojo Vivo
(THE HOT ROCK)
20th Century-Fox un film de Peter Yates
CON
Robert Redford · George Segal
RON LEIBMAN · PAUL SAND · MOSES GUNN · WILLIAM REDFIELD · TOPO SWOPE
y ZERO MOSTEL EN EL PAPEL DE ABE GREENBERG
PRODUCIDA POR HAL LANDERS y BOBBY ROBERTS
DIRIGIDA POR PETER YATES · GUION: WILLIAM GOLDMAN
SEGUN LA NOVELA DE DONALD E. WESTLAKE
MUSICA QUINCY JONES
PANAVISION® COLOR DE LUXE®