Escrito por Paco Gómez Martín (Universidad Politécnica de Madrid)
Viernes 16 de Julio de 2021 17:00

1. Introducción

Este artículo inaugura una serie sobre la afinación y el temperamento. Tras más de diez años de columna nunca habíamos tratado este fascinante e importante tema, cuyas implicaciones matemáticas, como veremos, son notables. Curiosamente, el primer artículo de esta columna, publicado nada menos que en enero de 2004 por Vicente Liern [Lie04], versaba sobre afinaciones y temperamentos. Ha llegado el momento de reparar semejante postergación y zambullirnos con entusiasmo en el fantástico reino de la afinación y el temperamento.

Comenzamos aclarando la diferencia entre afinación y temperamento. Un **sistema de afinación** es la elección de notas en base a proporciones de números enteros entre frecuencias, esto es, en base a números racionales. Por ejemplo, una quinta en el sistema de afinación pitagórico tiene proporción 3:2. Un **temperamento** es un sistema de afinación en que algunos de los intervalos no se pueden expresar como números racionales. En el temperamento igual una quinta tiene proporción 2
, que es claramente un número irracional.

Intentar un examen de los sistemas de afinación y temperamento antes de la época de los griegos implica per se una alta cuota de especulación, ya que no han quedado restos escritos, únicamente restos arqueológicos fragmentarios y escasos. Como excepción, un grupo de arqueólogos descubrió en 2008 fragmentos de una flauta hecha perforando huesos de buitre y de mamut la cueva de Hohle Fels, al sur de Alemania [Jon15]. Estas flautas han recibido el nombre de flautas neardentales y su construcción se remontan a una horquilla de 42.000-43.000 años a.C. En el siguiente vídeo se muestra una reconstrucción de la flauta y se ve a un flautista profesional tocarla (véase del minuto 0:50 al 1:32). La flauta tiene 4 agujeros y las notas que emite corresponden aproximadamente a una escala diatónica (como se aprecia en el vídeo).

Figura 1: Flauta neardental

En este primer artículo vamos a cubrir los conceptos básicos de afinación y temperamento, que requieren solo matemáticas básicas, y a continuación a estudiar la afinación pitagórica.

2. Elementos básicos de la afinación y el temperamento

2.1. Frecuencias

Empezaremos a la manera clásica, a partir del monocordio. El **monocordio** consiste en una cuerda montada sobre una caja de resonancia
E
como la de una guitarra o un violín. La cuerda está atada en el extremo
A
. Hay dos puentes movibles,
B
y
C
, que se usan para cambiar las frecuencias.
D
es una rueda movible y
W
es un peso, el cual se usa para estudiar la relación entre la tensión y la frecuencia; véase la figura 2. Para esta exposición, consideraremos que
C
está fijo y únicamente moveremos el puente
B
. El monocordio fue un instrumento con el que se enseñaba teoría de la música, especialmente intervalos y afinación, desde la antigüedad hasta la Edad Media.

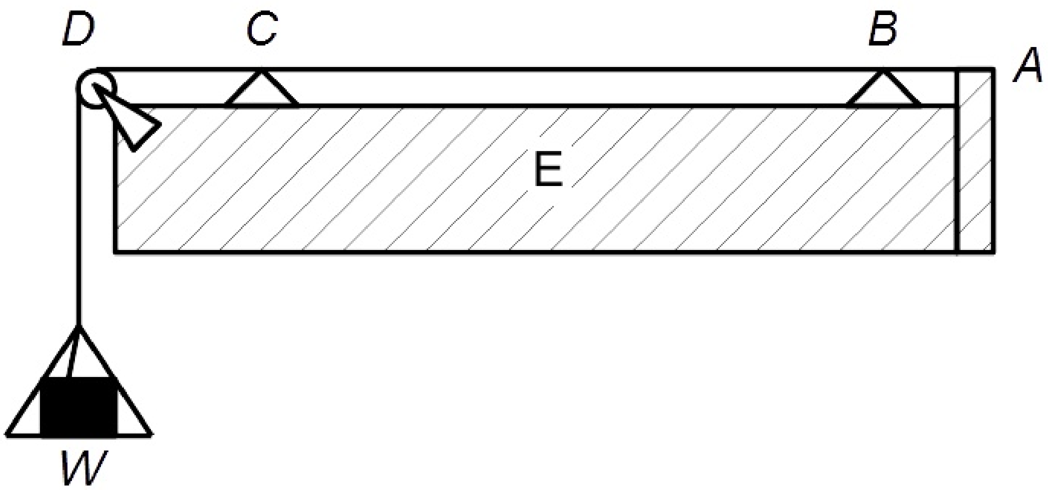


Figura 2: El monocordo (figura adaptada de [Wik21b])

Si ahora pulsamos la cuerda en algún punto del segmento *BC*, se producirá un sonido de frecuencia *f*. Si ahora movemos el puente B hasta la mitad del segmento

AC
, que es el punto
F
en la figura 3, y volvemos a pulsar la cuerda, ahora en algún punto intermedio de
CF
, el sonido producido tendrá frecuencia 2
f
.

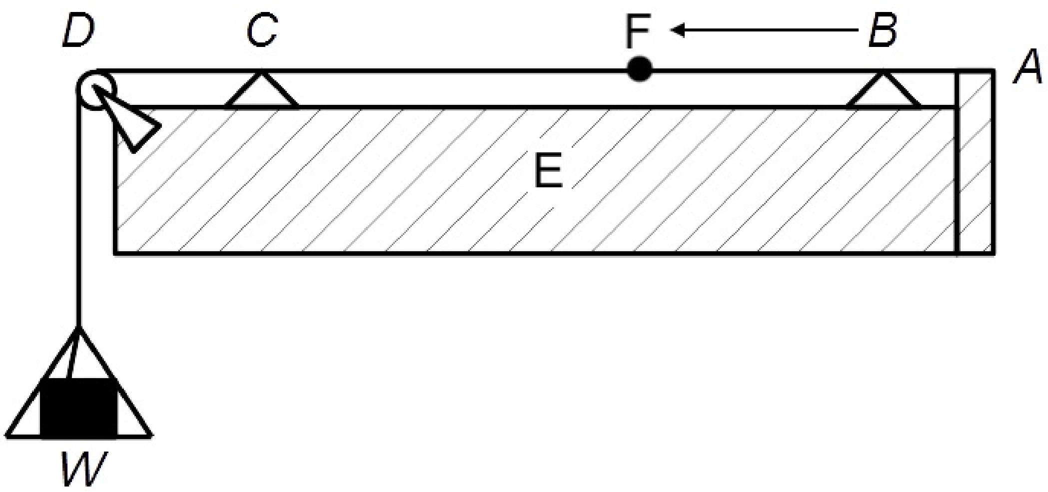


Figura 3: Producción de un sonido una octava más agudo (figura adaptada de [Wik21b])

El sonido de frecuencia $2f$ lo oiremos como una octava más alto que el sonido de frecuencia f. Este hecho era ya conocido por los griegos y en especial por Pitágoras. Si tomamos la proporción entre la frecuencia del segundo sonido con respecto a la del primero, esta será de 2:1 y se corresponderá también con el cociente

. Se pueden explorar otras proporciones, como por ejemplo, 3:2 o 4:3. Si movemos el puente B a un punto F de modo que $\frac{CA}{CF}$
, el sonido obtenido será el de una quinta perfecta.

En general, dados dos sonidos de frecuencias f_1, f_2 con $f_1 < f_2$, el cociente $\frac{f_2}{f_1}$
 da la diferencia de altura entre ellos. Así, si el cociente es 2, la diferencia es una octava; si el

cociente es 3/2, es una quinta perfecta, y así sucesivamente.

2.2. División igual de la octava y cents

Para precisar las diferencias entre los intervalos que aparecerán en los distintos sistemas de afinación y temperamento, necesitaremos un método para comparar intervalos. Hay muchos métodos, pero uno que permite una comparación cómoda y precisa es el de los cents. Formalmente, el **cent** es una unidad de comparación de frecuencias y se basa en la división de una octava en 1.200 partes. Un cent equivale a c = $\sqrt[1200]{2}$ $\approx$ 1.00057778950655. Nótese que está definición se basa en el hecho de que las diferencias interválicas son factores multiplicativos de las frecuencias, como vimos en la sección anterior. En la escala cromática habitual, un semitono son 100 cents; una quinta, 700; y una octava, 1200. La ventaja de medir las diferencias de frecuencias con cents es que las octavas aparecen igualmente espaciadas y ello es porque los cents es una escala logarítmica. Si esas diferencias de frecuencias se miden en el espacio de las frecuencias, no aparecen igualmente espaciadas y la comparación es mucho más difícil.

Dadas dos notas de frecuencias f_1, f_2, la diferencia en cents entre las dos (suponiendo $f_1 < f_2$) es

$$n = 1200 \cdot \log_2 \left(\frac{f_2}{f_1} \right)$$

Y, recíprocamente, si la frecuencia de la primera nota f_1 es conocida así como el número de cents n hasta la segunda nota es

$$f_2 = f_1 \cdot c^n = f_1 \cdot 2^{\frac{n}{1200}}$$

En el temperamento igual, una tercera mayor son 400 cents, mientras que en la afinación pitagórica es de 407.82 cents; esta última cantidad se ha obtenido de introducir en la fórmula anterior la proporción entre las frecuencias, que es de $\frac{81}{64}$

, como veremos más adelante.

2.3. La serie armónica

Para terminar esta sección, vamos a tratar la serie armónica, pues tiene importancia notable en los sistema de afinación y temperamentos. Muchos instrumentos musicales están basados en la emisión de frecuencias de una caja de resonancia, como por ejemplo en el caso de las cuerdas o de los instrumentos de viento. El sonido que se oye en esos instrumentos es una combinación de varias frecuencias que suenan a la vez. La frecuencia más grave se llama frecuencia fundamental y el resto de las frecuencias son los armónicos. Los armónicos tienen frecuencias que son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental. Este conjuntos de armónicos asociados a una frecuencia fundamental se llama **serie armónica**.

En la figura 4 se puede ver los primeros 20 términos de la serie armónica de un sonido de frecuencia 32.70, el do$_1$ en notación científica. Encima de cada armónico aparece la diferencia en cents con respecto a la división igual de la octava redondeado al entero más cercano. Las notas marcadas en azul son resultan demasiado bajas y las notas en rojo, demasiado altas. En el caso del la□, la diferencia es de +41 cents, que es casi un cuarto de tono, diferencia que es claramente perceptible por un oído normal.

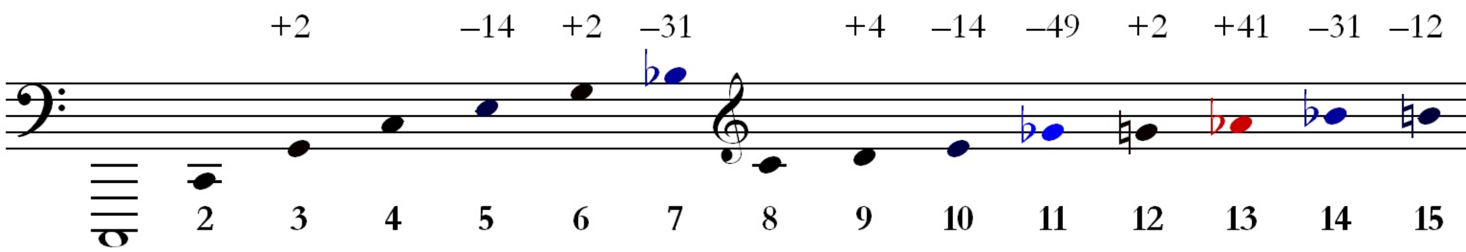


Figura 4: Serie armónica (figura adaptada de [Wik21a])

El segundo armónico es la octava, como se ve en la serie; el tercero es la quinta; el cuarto vuelve a ser la octava; el quinto es la tercera mayor (algo más baja que la tercera mayor de la división igual de la octava, unos 14 cents menos); y el sexto es la quinta.

3. Afinación pitagórica

Los griegos tenían múltiples sistemas de afinación, que glosamos brevemente en la siguiente sección, pero la afinación que permaneció en la práctica común fue la **afinación pitagórica**. La afinación pitagórica establece las notas en base a los dos primeros intervalos de la serie armónica, esto es, la octava y la quinta, que tienen proporciones 2:1 y 3:2, respectivamente. Veamos cómo funciona tal construcción.

Empecemos por tomar una nota cualquiera, digamos do. Usar la octava no da ningún intervalo nuevo distinto de la octava, de modo que aplicamos la proporción 3:2 para obtener nuevos intervalos. Como 3:2 es una quinta, llegamos a sol. Si multiplicamos la frecuencia de sol por 3:2, obtenemos re en la segunda octava, de proporción 9:4. Como queremos mantener las notas en una sola octava, pasamos este re a la primera octava dividiendo por 2. Esto da como resultado 9:8 como proporción del intervalo do–re; véase la tabla 1. Continuamos con este procedimiento y saltamos otra quinta desde re, multiplicando por 3⁄2, y aterrizamos en la nota la, de proporción 27:16, que se mantiene en la octava de referencia. Damos otro salto, ahora a mi, pero salimos de la octava. Dividimos por dos la proporción y obtenemos 81:64. Por último, llegamos a la nota con otro salto de quinta y llegamos a la nota si, que nos da la proporción 243:128. En la tabla 1 se muestran todas las proporciones de la afinación pitagórica así como sus valores en cents. Se puede apreciar que todos los intervalos no son iguales con respecto al temperamento igual. Nótese además que la nota fa ha sido obtenida dan un salto hacia el registro grave en lugar de hacia el registro agudo. Su proporción se ha conseguido multiplicando por 2⁄3 para bajar una quinta y por 2 para subir a la octava, lo que da una proporción de 4:3.

Notas	Do	Re	Mi
Proporción	1/1	9/8	81/64
Cents	0	203.91	407.82

Tabla 1: Afinación pitagórica para la escala diatónica

La afinación pitagórica presenta varios problemas. El primero de ellos es el del tamaño de los semitonos. Un tono tiene proporción 9/8, por ejemplo, do–re. Si tomamos el semitono si–do, que tiene proporción

$$\frac{2}{\frac{243}{128}} = \frac{256}{243} = \frac{2^8}{3^5}$$

y formamos un tono con estos dos semitonos, obtenemos $\frac{2^8}{3^5}$ × $\frac{2^8}{3^5}$ = $\frac{2^{16}}{3^{10}}$ ≈ 1.10985715, que claramente no es igual a 9/8 = 1.125.

El segundo problema viene dado por el **círculo de quintas** (más bien la espiral de quintas, como veremos). La tabla de arriba se puede completar de modo que incluya las 12 notas de la escala cromática. Se puede partir de un do y subir por quintas hasta el sol# y luego completar las notas que faltan, que son de do hasta la♭, descendiendo por quintas. La tabla de proporciones que resulta siguiendo este procedimiento se muestra a continuación:

Notas	Do	Sol	Re
Proporción	1/1	3/2	9/8

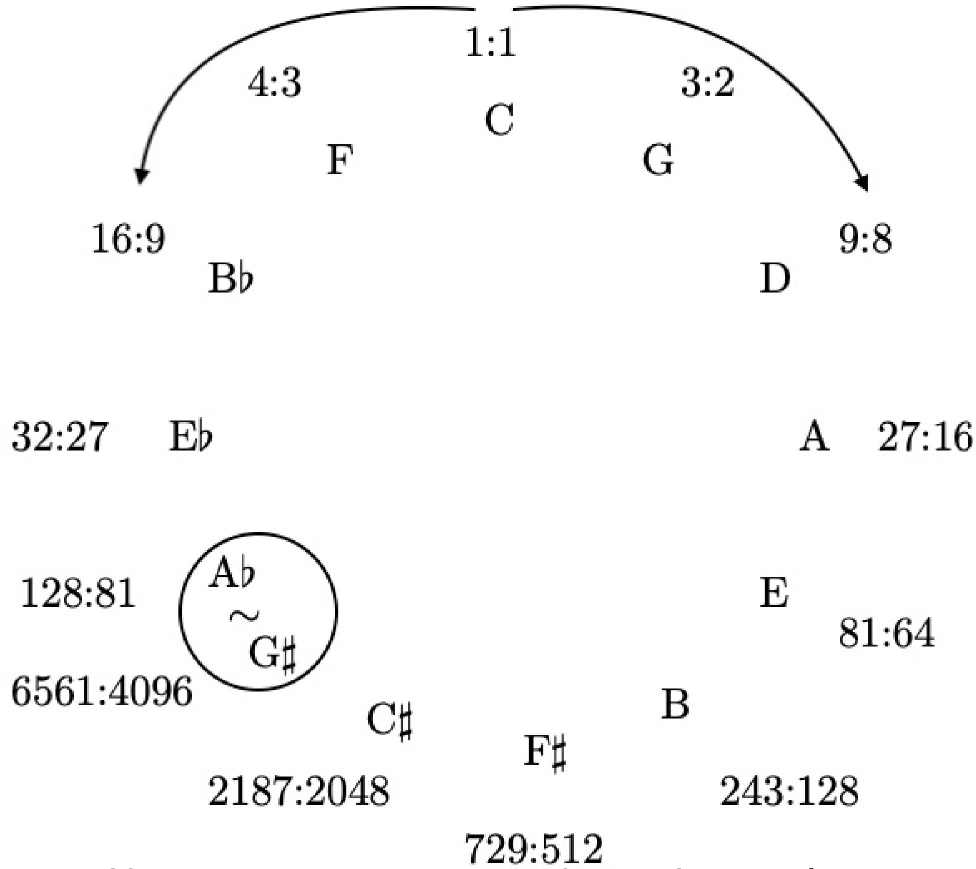
$$\frac{6561}{4096}$$

Cents	0	701.96	203.91

Notas	Do	Fa	Si♭
~Sol#			
Proporción	1/1	4/3	9/16
Cents	0	498.04	996.09

Tabla 2: Afinación pitagórica para la escala cromática

Si la tabla anterior la ponemos en forma de círculo de quintas, se entenderá el problema más claramente. En efecto, cuando se recorre el círculo de quintas en ambos sentidos las notas la♭ y sol# no coinciden, es decir, el círculo de quintas no se cierra. ¡En realidad, es una espiral de quintas! Y una espiral potencialmente infinita.



[illegible] (el círculo

$$\frac{\frac{6561}{4096}}{\frac{128}{81}} = \frac{3^{12}}{2^{19}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{12}\frac{1}{2^7} = \frac{531441}{524288} \approx 1.013643265$$

[illegible]

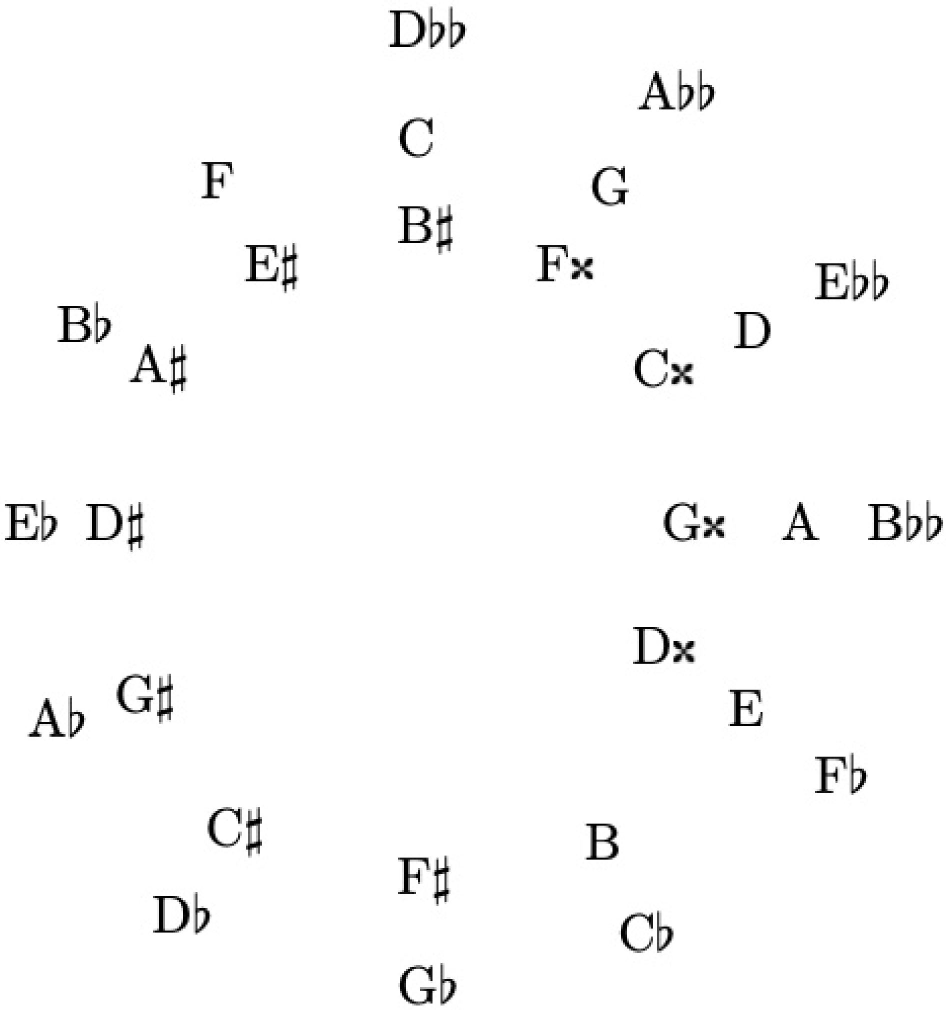


Figura 6: Espiral de quintas con la afinación pitagórica (figura tomada de [Ben06])

4. Para saber más

En música que no requiere cambios de tonalidad, como puede ser la música modal o la monodia, la afinación pitagórica es factible en la práctica musical; de hecho, ha sido así durante siglos y en muchas tradiciones musicales. A continuación, se mencionan varios ejemplos entre muchos posibles. El primero es del grupo *Gothic voices*, especializado en música antigua.

Figura 7: *Gothic voices - Il nome del bel fior*

El siguiente vídeo es un ejemplo en música instrumental, en este caso con un órgano portátil.

Figura 8: Catalina Vicens - *Audi Pontus, Audi Tellus*, del Códice de Las Huelgas

Para el lector ávido de profundizar en los sistemas de afinación y temperamento recomendamos el libro de Goldáraz *Afinación y temperamentos históricos* [Gol04] y con un sabor más matemático, el libro de Benson *A mathematical offering* [Ben06]. Un libro que brilla por su erudición es el de Barber [Bar51], de título *Tuning and temperament: a historical survey* . Recomendamos al lector la exposición de los sistemas de afinación griegos, que no han sido incluidos aquí por su excesiva longitud. Por último, no podemos dejar de recomendar los vídeos de Elam Rotem del proyecto *Early Music Sources* ; el vídeo relevante en la columna de este mes es *Temperaments - What you need to know* [Rot20].

Bibliografía

[Bar51] J. Murray Barbour. *Tuning and temperament: a historical survey*. Dover Publications, Inc., New York, 1951.

[Ben06] D. Benson. *Music: A Mathematical Offering*. Cambridge University Press, 2006.

[Gol04] J. Javier Goldáraz. *Afinación y temperamentos históricos*. Alianza Editorial, Madrid, 2004.

[Jon15] Josh Jones. *Hear the World's Oldest Instrument, the*

"Neanderthal Flute", Dating Back Over 43,000 Years, 10 de febrero de 2015.

[Lie04] Vicente Liern. *Afinación*, enero de 2004.

[Rot20] Elam Rotem. *Temperaments - What you need to know*, 9 de mayo de 2020.

[Wik21a] Wikipedia. *Harmonic series*, accedido el 10 de julio de 2021.

[Wik21b] Wikipedia. *Monochord*, accedido el 10 de julio de 2021.