1. Introducción

Con el artículo de este mes queremos debatir una cuestión que aparece con frecuencia cuando un observador escéptico oye hablar de las relaciones entre las matemáticas y la música, y esa cuestión es sencillamente la de si esas relaciones son *reales*. En otras palabras,¿hay de verdad matemáticas en la música? ¿O no será que estamos forzando la existencia de esa relación? ¿En qué *sentido* hay matemáticas en la música? La respuesta a esto vendrá dada por la definición de matemáticas que estemos usando. Vamos a explorar un poco más en su definición para poder dilucidar esta cuestión.

En su famoso libro *Las matemáticas: contenidos, métodos y significado* Aleksandrov et al. [AKL12] dan tres rasgos característicos de las matemáticas, a saber: **abstracción**, **demostraciones** y **aplicaciones**. Cualquier persona que haya tenido un mínimo contacto con las matemáticas convendrá en que esos tres rasgos forman parte de la esencia de las matemáticas. Un matemático profesional o en general un científico podrá añadir más.

No hay duda de que la abstracción está en cada pliegue de las matemáticas. Las matemáticas operan con objetos (números, funciones, objetos geométricos) sin preocupación alguna sobre su significado real. Las aplicaciones pondrán nombre a esos objetos abstractos cuando sea menester. Los matemáticos examinan propiedades de objetos en apariencia dispares e identifican propiedades comunes a ellos, a partir de las cuales crean otros objetos más abstractos. Así, por ejemplo, es fácil imaginar como surgieron los números naturales $\mathbb{N}$. Sería probablemente a partir de la abstracción del cardinal de colecciones de objetos cotidianos, fuesen un rebaño de ovejas o los dedos de la mano. Tras el descubrimiento de los números naturales vendría las operaciones de suma y resta, y con ellas, inevitablemente, el descubrimiento de los números enteros $\mathbb{Z}$, como extensión natural para contener los resultados de ciertas operaciones de resta, las que dan números negativos. La división de números enteros debió conducir a los números racionales $\mathbb{Q}$, como conjunto que contendría a todos los resultados posibles de las divisiones en $\mathbb{Z}$. Hasta aquí tendríamos todos los conjuntos de números que nos permitirían operar con cantidades discretas. Si surgiese la necesidad de operar con cantidades continuas, entonces habría que construir un conjunto adecuado y ese el de los números reales (y aquí ya estamos hablando de conjuntos cuya construcción es compleja). Si aún deseásemos abstraer aun más, podríamos ampliar los números reales de modo que contuviese a todas las raíces de los polinomios de coeficientes reales; habríamos topado con los números complejos . Estos pueden incluirse en conjuntos más abstractos tales como cuaterniones. Este es un típico proceso de abstracción de las matemáticas.

La abstracción existe en otras ciencias, desde la física a la biología. Por ejemplo, piénsese en los esfuerzos de la física por dar una teoría unificada de las fuerzas en el universo. Sin embargo, en las matemáticas la abstracción tiene características distintivas. Las matemáticas normalmente prescinden de todas las propiedades de un objeto salvo sus relaciones cuantitativas y sus formas espaciales. Dicha abstracción ocurre en un proceso gradual de lo más concreto hacia lo más general, como hemos mostrado en el ejemplo anterior con los distintos conjuntos de números. Además, las matemáticas no se mueven de ese mundo de abstracción. Mientras que un físico u otro científico comprueba sus teorías mediante experimentos, esto es, volviendo al mundo sensible, el matemático comprueba la veracidad de las teorías únicamente a través de la argumentación lógica y la computación. Ciertamente, muchos problemas de gran abstracción matemática se han originado en problemas prácticos. Estos han servido de inspiración, pero una vez que han sido formulados matemáticamente en términos abstractos, su origen se ha olvidado.

La siguiente característica son las demostraciones, el **rigor lógico**, en suma. Las demostraciones matemáticas son cadenas de razonamientos lógicamente válidos que enlazan las hipótesis con la tesis o conclusión. Esos razonamientos tienen que ser impoluto, escrupulosamente rigurosos, y como dice Aleksandrov y sus coautores, *tiene que ser incontestable y completamente convincente por cualquiera que lo entienda* (página 3 de [AKL12]). Ese rigor tiene sus límites y ha evolucionado mucho a lo largo de la historia. El rigor tal y como lo entendemos modernamente se empezó a establecer a finales del siglo XIX, como ya hemos mencionado, con los esfuerzos de matemáticos como Cauchy, Riemann, Cantor, Dedekind y otros. Hasta entonces el concepto de "prueba" era relativo. A veces una prueba se reducía a una explicación convincente pero no rigurosa, incluso podía ser una explicación literaria. La notación también era un problema; no era tan concisa y potente como lo es hoy en día y con frecuencia había problemas de ambigüedad. En otras ocasiones se encontraban en las pruebas misticismo o razonamientos religiosos o filosóficos. Incluso hoy en día el concepto de demostración es relativo según el lector a quien esté dirigida. Una demostración de un teorema destinada a ser publicada en una revista de investigación no es lo mismo que una demostración que se explica a un estudiante de bachillerato. El nivel de rigor varía así como la retórica con que se transmite. La escritura de una demostración es un tema importante en la enseñanza de las matemáticas.

La última característica de las matemáticas es su inmenso y asombroso abanico de aplicaciones. Las matemáticas las usamos constantemente en nuestra vida cotidiana. Medimos el tiempo, hacemos estimaciones de cantidades, calculamos valores medios para tomar decisiones, comprobamos la cuenta de la compra, evaluamos probabilidades, interpretamos estadísticas, entre otras. Y todo esto es sin apenas darnos cuenta; diríamos que son las matemáticas *inconscientes*. Las matemáticas son el fundamento de la tecnología en su sentido más amplio. El reinado de las matemáticas se ha extendido aun más con el advenimiento del ordenador. Se ha añadido una capa más de significado a las matemáticas y esta es la de *computacional*. Ya no solo se quiere resolver un problema, sino que se quiere dar una solución que sea computable y en muchos casos programable. Las matemáticas tienen una formidable capacidad para modelizar fenómenos de la naturaleza, desde modelos climáticos a modelos atómicos, las matemáticas aparecen como herramienta fundamental. En las últimas décadas las matemáticas han empezado a modelizar fenómenos típicos de disciplinas de letras y artes. Así, se habla de lingüística computacional, de teoría computacional de la música, por poner dos ejemplos sobresalientes.

A las tres características de la matemática añadiría una más: su capacidad de belleza. Sabemos que esto puedo sonar extraño, incluso algo frívolo, pero nada más lejos de la realidad. Y en unas notas sobre didáctica de la matemática es obligado hablar de ello, pues esa belleza que poseen las matemáticas puede transmitirse y, lo que es mejor, puede ser un eficaz medio de enseñanza. Es inevitable en este punto no citar a Bertrand Russell [Rus19] (nuestra traducción):

Mathematics, rightly viewed, possesses not only truth, but supreme beauty, a beauty cold and austere, like that of sculpture, without appeal to any part of our weaker nature, without the gorgeous trappings of painting or music, yet sublimely pure, and capable of a stern perfection such as only the greatest art can show. The true spirit of delight, the exaltation, the sense of being more than Man, which is the touchstone of the highest excellence, is to be found in mathematics as surely as poetry.

[Las matemáticas, cuando se ven correctamente, no solo poseen verdad, sino belleza suprema, una belleza fría y austera, como la de una escultura, sin los ropajes preciosos de la música, y aun sublimemente pura, y capaz de una severa perfección solo como un arte grande puede mostrar. El verdadero espíritu del deleite, la exaltación, el sentido de ser más que el Hombre, que es la piedra de toque de la más alta excelencia, se encuentra en las matemáticas tanto como en la poesía.]

Nosotros no concebimos la comprensión no ya artística, sino científica sin la mediación de la belleza. La experiencia estética interior descubre caminos a la comprensión que de otra manera pasarían completamente inadvertidos o a los cuales arribaría dando un largo y penoso rodeo. La experiencia estética es como un fogonazo súbito que nos alumbra senderos ocultos conducentes a tierras ignotas. En realidad, no sabemos que hay al final del camino, pero hace tiempo que comprendimos que es el tránsito por el camino lo importante. Hay belleza en toda construcción que muestre unidad orgánica, coherencia formal, afán de indagación, visión profunda y original y, sobre todo, autenticidad. Y esto se puede encontrar en la novena sinfonía de Beethoven o en teoremas de la teoría de números. En matemáticas esa belleza se encuentra en sus resultados y en sus métodos. La fórmula de Euler, $e^{\pi i} + 1 = 0$ es un resultado de gran belleza por su concisión y profundidad. Otra fuente de belleza son las demostraciones. Cuando una demostración usa un número mínimo de hipótesis, es sorprendentemente sucinta, obtiene un resultado a partir de resultados aparentemente no relacionados, entonces seguramente nos hallamos ante una prueba bella.

Volvamos a la pregunta inicial: ¿son reales las matemáticas que vemos en la música? La respuesta es, a la luz de la definición anterior, que sí lo son. La música proporciona objetos que comparten varias propiedades y que permiten a las matemáticas realizar su ejercicio de abstracción. De hecho, en muchas ocasiones es posible aplicar teorías matemáticas ya consolidadas a la música. Por ejemplo, como vamos a ver en el artículo de este mes, se puede analizar una pieza musical usando aritmética modular y operaciones geométricas (transposiciones e inversiones). El rigor se emplea de una manera más limitada en la teoría matemática de la música, principalmente para probar teoremas. Las aplicaciones, sin embargo, son numerosas, sobre todo para modelizar la música y para su tratamiento computacional.

2. Aritmética modular y transposiciones e inversiones

2.1. Aritmética modular

El uso de la aritmética modular tiene que ver con el **principio de equivalencia de la octava**. Este principio establece que dos notas que están separadas por una octava perfecta se perciben como más cercanas que cuando están separadas por cualquier otro intervalo (distinto del unísono). Dos notas a una octava de distancia tienen una proporción de sus frecuencias de 2:1, tomando el cociente entre la nota más aguda y la más grave. Cuando se tocan dos notas en octava la cantidad de armónicos comunes entre ambas notas es muy alto; esto podría ser una de las razones por las que este fenómeno ocurre. Sin embargo, se sabe que es un fenómeno cultural, aprendido. Los sumerios, por ejemplo, no tenían ni siquiera una palabra para el concepto de octava ni del estudio de sus escritos sobre teoría musical para deducirse su existencia o uso. En otras culturas se encuentra la palabra octava, pero no con el sentido que se le da en la música occidental, en el sentido de equivalencia de notas; en esas culturas está más asociado al concepto de tesitura. Hay estudios que han examinado la cuestión en primates y bebés y parece que hay una cierta base biológica, pero está lejos de entenderse el fenómeno por el momento; véase [DL84 , Deu99] para más información. En ciertos sistemas musicales, como el occidental, el principio de equivalencia de la octava hace que las notas separadas por una octava se consideran como la misma.

La aritmética modular es un tipo de aritmética que es adecuada para describir una aritmética circular. El ejemplo clásico que se suele dar es el de la hora en el reloj. Las horas están definidas desde las cero horas, la media noche, hasta las 11 horas, una hora antes del mediodía. A partir de ahí se repite el mismo ciclo. Como el día está compuesto de dos periodos de horas, añadimos la etiqueta de “por la mañana” si es el primer periodo o “por la tarde” si es el segundo periodo. Pero la idea es la misma: volvemos al punto de partida una vez que hemos recorrido un tramo de 12 horas.

¿Cómo formalizamos esto en matemáticas? ¿Cómo introducimos abstracción aquí? ¿Cómo aplicamos estas ideas a la música? Empezamos considerando $\mathbb{Z}$, el conjunto de los números enteros, como conjunto de partida. ¿Por qué $\mathbb{Z}$ y no, por ejemplo, $\mathbb{N}$, los números naturales? La razón es que no siempre recorreremos en sentido positivo el conjunto; a veces, lo recorreremos en sentido negativo y necesitaremos contemplar valores negativos. Siguiendo con la abstracción, en el caso del reloj el periodo era 12, pero en general será cualquier número natural no negativo, pongamos n. Entonces diremos que dos números a,b son equivalentes si puedo pasar de uno a otro dando saltos del tamaño del periodo n. El número n se llama **módulo**. En términos matemáticos diríamos que a y b son **congruentes** y lo definiríamos diciendo que

a es congruente con b si existe un entero k tal que

$$a - b = k \cdot n$$

Si a y b son congruentes módulo n, se escribe $a \equiv b \bmod n$.

Por ejemplo, si tomamos $n = 2$, entonces todos los números enteros pares son congruentes entre sí. En efecto, si a, b son dos números pares, entonces se pueden escribir como $a = 2k_1$ y $b = 2k_2$, para ciertos k_1, k_2. Su diferencia será $a - b = 2(k_1 - k_2)$, que muestra que son congruentes. De modo similar, se puede ver que todos los números impares son congruentes entre sí. Si $n = 3$, entonces todos los números de la forma $3k + 1$, con k un número entero, son congruentes entre sí. Y de modo similar, lo serán los de la forma $3k$ entre sí, y los de la forma 3 *k* + 2 entre sí. Si *n* es un módulo arbitrario y *a* un número entero cualquiera, para saber cuál es el número congruente más pequeño con *a* basta hacer la división entera de *a* entre *n*. De esta división tendremos la relación $a = c \cdot n + r$, donde c es el cociente de la división y *r* el resto. De esa expresión se sigue que *a* y *r* son congruentes módulo *n*. Como el resto r siempre cumple que mayor o igual que 0 y menor o igual que *n* - 1, *r* es el menor entero positivo congruente con *a*. Hemos probado que el resto de la división entera de *a* por el módulo es congruente con *a*.

En música la aritmética modular que interesa es la de módulo 12, es decir, cuando $n = 12$. ¿Por qué es esto así? Sencillamente, porque la octava en la música occidental se divide en 12 semitonos iguales.

La aritmética modular además redefine ligeramente las operaciones aritméticas habituales. Si estamos en aritmética módulo 12, entonces 7 + 6 no son 13, sino 1, porque $13 \equiv 1 \mod 12$. Así todos los resultados de operaciones aritméticas se reducen a su correspondiente valor módulo entre 0 y 12. Por ejemplo, $7 \cdot 5 \mod 12$ es 11 porque $35 - 11 = 2 \cdot 12$.

La aritmética módulo 12 en música nos permite centrarnos en los tonos en particular sin tener que considerar en que octava aparecen. Esto es muy útil para el análisis armónico y orquestal. Por ejemplo, en el análisis de obras orquestales nos fijamos en las notas que aparecen en un cierto compás, pero no dónde aparecen ni en qué instrumentos están distribuidas. Un acorde de do mayor tendrá las notas do, mi y sol, aunque estas puedan asignarse a una gran cantidad de combinación de instrumentos. Para el análisis de la textura o de la orquestación es relevante qué instrumentos tocan esas notas, pero no en cambio para el análisis armónico o melódico. Usar la aritmética modular para el análisis armónico facilita el mismo porque implícitamente usa el principio de la equivalencia de la octava.

3. Transposiciones e inversiones

Fijemos en todo lo que sigue el módulo en 12, según justificamos antes. Dada una nota x, una **transposición** $T_m(x)$, donde m es un entero fijo, es la nota

$$T_m(x) = x + m \bmod 12$$

Esto, como se ve inmediatamente, no es más que añadir una nota fija de valor m y aplicar la equivalencia de la octava. La idea de la transposición en la aritmética refleja exactamente la idea de la transposición en música. Si a cada nota de una melodía se le añade 12, se ha transpuesto una octava; si se le añade 7, entonces la transposición es una quinta justa (7 semitonos es una quinta), y así de modo similar con cualquier otro valor que se añada.

La otra operación que nos interesa es la **inversión**. En música invertir un intervalo da otro, que es su complementario respecto a la octava. La inversión de una quinta es una cuarta; la de una tercera, una sexta; la de una segunda, una séptima; y así con el resto de los intervalos. No obstante, también es interesante invertir respecto a una nota fija, como cuando se invierte un acorde. La primera inversión de un acorde de do mayor en posición fundamental es una inversión respecto a la tercera nota, el sol. La función que capta la esencia de la inversión musical es la función inversión, definida por

$I_m(x) = -x + m \bmod 12$

Si $m = 12$, la inversión es respecto a la octava y entonces estamos ante las inversiones interválicas normales (unísono va a octava, segunda a séptima y así sucesivamente). Cuando m toma otros valores, la inversión es respecto a la nota que representa m.

Para fijar ideas, supongamos las siguientes asignaciones de notas y números:

do = 0, *re♭* = 1, *re* = 2, *mi♭* = 3, *mi* = 4, *fa* = 5, *fa#* = 6

sol = 7, *sol#* = 8, *la* = 9, *la#* = 10, *si* = 11

El acorde de do mayor corresponde al conjunto {0,4,7}. Una transposición por una quinta es

$T_7(\{0,4,7\}) = \{T_7(0), T_7(4), T_7(7)\} = \{7,11,14\} = \{7,11,2\}$

donde se ha aplicado el módulo 12. Esto nos ha llevado el acorde de do mayor al de sol mayor; véase la figura 1.

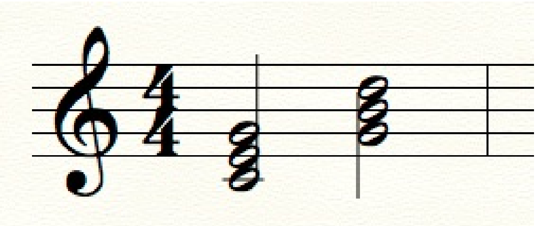

Figura 1: Transposición del acorde de do mayor

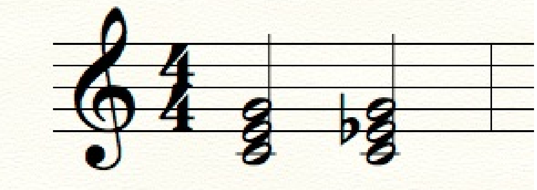

Figura 2: Inversión del acorde de do mayor respecto a sol

Figura 3: Sujeto de la fuga

Figura 4: Contrasujeto de la fuga

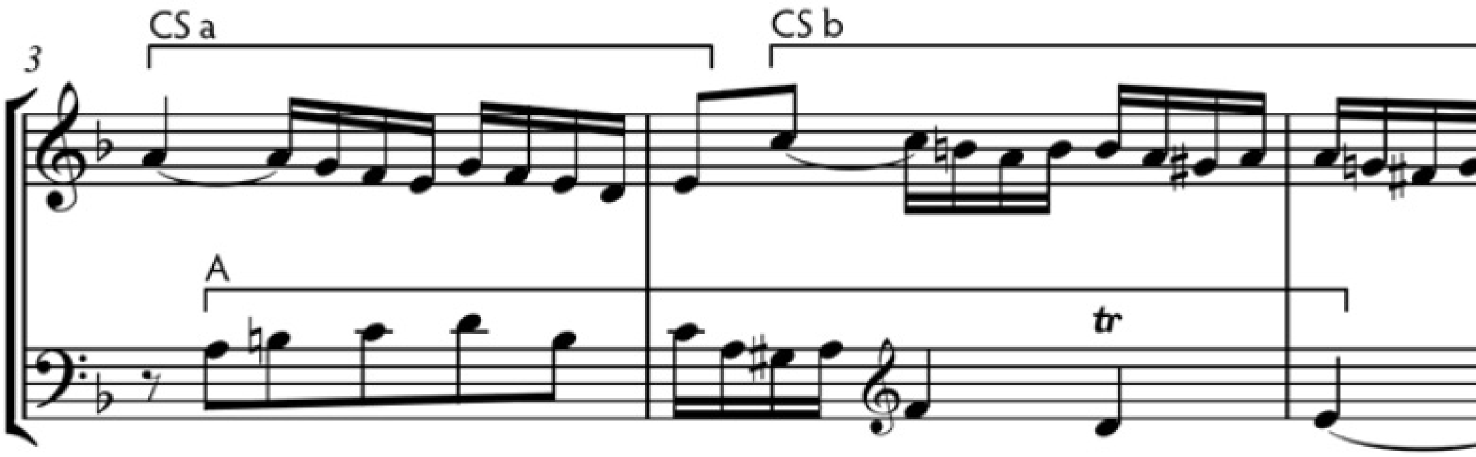

Figura 5: [illegible] de nuevo el sujeto sin transposición

Figura 6: [illegible] En el compás 12

Figura 7: El primer episodio de la fuga

Figura 8: El stretto de la fuga


36
CS a
CS a
CS a
a
a
a
a
a
a

[illegible]


Piano


20
24
28
32

Figura 10: La fuga número 6 en re menor de *El clave bien temperado*, libro I, de Johann ... http://bach.nau.edu/clavier/nature/fugues/Fugue06.html ... de mayo de ...