Escrito por Rafael Losada
Sábado 01 de Marzo de 2008 02:00

Un día especial

El 12 de mayo, **Día Escolar de las Matemáticas** y víspera de *martes 13*, se dedica este año a la relación entre Música y Matemáticas, eje central de esta sección de Divulgamat. Uno de los pilares de esa relación lo representa el sistema de escalas musicales y su conexión con la afinación, tema que se puede ver desarrollado en el artículo de Vicente Liem con el que se inauguró esta sección.

Como dedicatoria al Día Escolar de las Matemáticas, comenzaremos hablando de días especiales y, siguiendo el hilo, retomaremos las escalas musicales desde un punto de vista ligeramente distinto.

Querida Alicia

- Me la dieron -continuó diciendo Humpty Dumpty con mucha prosopopeya, cruzando una pierna sobre la otra y luego ambas manos por encima de la rodilla- me la dieron... como regalo de no-cumpleaños. (Lewis Carroll, *A través del espejo y lo que Alicia encontró al otro lado*.)

El más básico sistema de clasificación es el que atiende a opuestos o complementarios: positivo o negativo, cara o cruz, par o impar, sonido o silencio, ser o no ser.

Estas dicotomías toman frecuentemente la forma de criterios con los que dilucidar rápidamente algunas cuestiones. Criterios basados en la paridad son utilizados tanto en matemáticas como en la transmisión codificada de información digital para comprobar la existencia de soluciones o la coherencia de datos. La propia aritmética interna del ordenador es del tipo encendido-apagado.

Estamos ante un caso sencillo de lo que se conoce como ***clases de equivalencia***. Alicia cumple años el mismo día del año, independientemente del año de su vida. Todos estos días tienen, pues, una relación común, llamada ***relación de equivalencia***, que los diferencia de los días de no-cumpleaños.

Para Alicia, los días de *cualquier* año se separan, bajo esta relación, en dos clases de equivalencia: [cumpleaños] y [no-cumpleaños] (los corchetes denotan que nos referimos a *clases*).

Sin embargo, estas dos clases no constan de igual número de elementos. Hay muchos más días de no-cumpleaños que días de cumpleaños, así que, como advierte Humpty Dumpty a Alicia, más vale celebrar los primeros que los segundos.

Seven Up

Más interesantes, en un sentido práctico, resultan las clases que reparten por igual los elementos.

Un caso cotidiano -nunca mejor dicho- lo encontramos en las clases llamadas “días de semana”. Arbitrariamente, se elige un día y se le hace corresponder el número 1. Lo denominamos “lunes“, según la norma actual, si bien en sus orígenes hebreos el primer día no fue lunes sino domingo y correspondería al primer día de la creación, fijado en fecha tan reciente, históricamente hablando, como es el 7 de octubre del año 3761 a.C.

Los días siguientes reciben nuevos nombres, hasta el séptimo, “domingo“. A partir de ahí, la secuencia se repite, de forma que el *octavo* día vuelve a ser “lunes“, el noveno “martes”, etc. Llamamos *semana* al tiempo que separa (***distancia*** temporal) un día del siguiente del mismo nombre, es decir, de la misma *clase*. También usamos aquel mismo nombre, *semana*, para el

intervalo
de días correspondiente a esa distancia temporal.

Por ejemplo, si hoy es miércoles decimos que para el próximo miércoles falta una semana. Pero también llamamos semana al intervalo que abarca el miércoles, jueves, viernes, sábado, domingo, lunes y martes, es decir, a la serie de días comprendidos entre dos miércoles consecutivos.

¿Por qué se convino en repetir la secuencia precisamente cada siete días? Seguramente porque cada siete días la luna cambia de fase (llena, menguante, nueva y creciente), por lo que desde tiempos prehistóricos basta su observación para determinar el tiempo transcurrido entre dos acontecimientos alejados algunos días, lo que resulta mucho más práctico que llevar cuenta de los amaneceres.

Si deseamos distinguir un lunes de otro hace falta señalar la semana correspondiente. La forma más sencilla de conseguirlo es numerándolas. A la primera semana, ya sea la supuesta de la creación o cualquier otra semana que convengamos como inicial, le asignaremos el número 0, y a las sucesivas semanas 1, 2, 3, etc. Estos números se mostrarán como subíndices del día de la semana. Por ejemplo, M_5 indica el martes de la quinta semana a partir de la inicial (que hemos denotado como semana 0).

En suma, tenemos que las semanas, consideradas como intervalos, abarcan los días de lunes a domingo:

semana 0 (inicial) = $\{L_0, M_0, X_0, J_0, V_0, S_0, D_0\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
semana 1 = $\{L_1, M_1, X_1, J_1, V_1, S_1, D_1\} = \{8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$
…

que los días de la semana son las clases:

[lunes] = {L_0, L_1, L_2, L_3, L_4, L_5...} = {1, 8, 15, 22, 29, 36...}
[martes] = {M_0, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5...} = {2, 9, 16, 23, 30, 37...}
...

y también que usamos la palabra semana para la diferencia de siete unidades-día entre dos días consecutivos del mismo nombre:

semana = $L_n - L_{n-1} = M_n - M_{n-1} =... = 7$

De oca a oca

Una ***progresión aritmética*** es una sucesión -de números- en donde, a partir de un número inicial, la diferencia entre cada término y el anterior siempre es constante (esta constante se denomina, precisamente, ***diferencia***). Por ejemplo, los números impares {1, 3, 5, 7...} forman una progresión aritmética de primer término 1 y diferencia 2.

Observamos entonces que cada elemento de la clase [martes] forma parte de una progresión aritmética cuyo primer término, el martes de la semana inicial (M_0), corresponde al día 2 y cuya diferencia es 7.

El término general, es decir, el número correspondiente al martes de la enésima semana (sin contar la inicial), será:

$M_n = M_0 + 7n$

donde n es cualquier número natural. La expresión anterior sintetiza cada uno de los elementos de la clase [martes]. Por supuesto, esta expresión se puede aplicar a cualquier otro día. Al viernes, por ejemplo:

$V_n = V_0 + 7n$

Congruencias modulares

Analicemos ahora cómo efectuamos los cálculos para averiguar qué día de la semana caerá un día determinado a partir de hoy.

Para ello no emplearemos la notación introducida por Gauss en su obra cumbre, *Disquisiciones aritméticas* (1801), referencia obligatoria en la Teoría de Números, sino una muy similar –derivada de aquella- que actualmente se utiliza en los programas informáticos.

Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855). Caricatura de la exposición El rostro humano de las Matemáticas .

Como los días de la semana vuelven a repetirse cada 7 días, es decir, vuelven a ser de la misma clase, sumar 7 y no sumar nada viene a ser lo mismo a efectos de cálculo:

7 (mod7) = 0

La expresión anterior se lee “7 módulo 7 es igual a 0”, y significa que el **resto** del número 7 al ser dividido por 7 es 0.

Una consecuencia de ese resultado es la siguiente igualdad:

L + 7 (mod7) = L (mod7) = 1

Es decir, el resultado de sumar 7 días a un lunes cualquiera vuelve a dar lunes. A este tipo de operaciones se le conoce como ***aritmética modular***. Como los restos posibles de dividir cualquier número entre 7 son 0, 1, 2, 3, 4, 5 y 6, el resultado de aplicar a una expresión cualquiera el módulo 7 arrojará como resultado uno de estos números.

Resumiendo, decir que "L+7 es igual que L módulo 7" simplemente significa que ambos días, L+7 y L, pertenecen a la misma *clase de equivalencia* [lunes] (llamada ***clase de congruencia*** en la aritmética modular), y por lo tanto los números correspondientes a esos lunes arrojan el mismo resto 1 al ser ambos divididos por 7.

Sigamos con los cálculos. Observamos que:

L + 14 (mod7) = 1

pues añadir 14 días equivale a sumar dos semanas enteras.

De igual forma, para cualquier número natural n:

L + 7n (mod7) = 1

pues hemos sumado n semanas enteras, por lo que todos ellos son elementos de la misma clase [lunes].

Por otra parte, tenemos que:

L + 8 (mod7) $\equiv$ L+ 1 (mod7) = M (mod7) = 2 pues 8 = 1 + 7, por lo que al sumar 8 y al sumar 1 se obtienen elementos de la misma clase (en este caso, [martes]).

En general, como cada siete días la cuenta vuelve a cero, **sumar N días a un día de semana particular equivale a sumar el resto de dividir N entre 7, es decir, sumar N (mod 7)**, tal como indica la siguiente tabla:

Días añadidos	L	M	X	J	V	S	D
7n	L	M	X	J	V	S	D
7n + 1	M	X	J	V	S	D	L
7n + 2	X	J	V	S	D	L	M
7n + 3	J	V	S	D	L	M	X
7n + 4	V	S	D	L	M	X	J
7n + 5	S	D	L	M	X	J	V
7n + 6	D	L	M	X	J	V	S

Es importante señalar aquí, para nuestros propósitos, que la aritmética modular se puede aplicar con éxito tanto a los días de la misma clase como de diferentes clases porque todos ellos guardan la misma distancia entre sí: entre el lunes y el miércoles de una semana determinada hay la misma distancia que entre el miércoles y el viernes.

El año sin martes 13

Veamos cómo el empleo de la aritmética modular nos permite resolver rápidamente esta cuestión: ¿es posible un año de nuestro calendario actual en donde no coincida ningún *agresivo* martes con un *nefasto* 13?

Ya sabemos que no es el caso de este año 2008, pues el día siguiente al Día Escolar de las Matemáticas es el 13 de mayo, martes. Pero, ¿habrá algún año que se libre de esta coincidencia?

Para averiguarlo, tomemos la semana del 13 de enero de ese supuesto año como semana inicial y llamemos C al cardinal o número correspondiente al día de la semana de ese 13 de enero. Así, el número C puede variar entre 1 y 7, es decir, entre lunes y domingo.

Como enero tiene 31 días, lo que ofrece resto 3 al dividirlo por 7, el día de semana correspondiente al 13 de febrero será igual C+3, módulo 7:

C + 31 (mod7) = C + 3 (mod7)

Hagamos lo mismo con los distintos meses. Ya que su número de días, de enero a noviembre, sigue la secuencia {31, 28 (29), 31, 30, 31, 30, 31, 31, 30, 31, 30}, añadidos al número C y quedándonos con el resto de dividir entre 7, obtenemos:

Tipo de año	Ene.	Feb.	Mar.
365 días	C	C+3	C+3
Bisiesto	C	C+3	C+4

Por ejemplo, en este año bisiesto 2008 los días de la semana correspondientes al 13 son:

Año	Ene.	Feb.	Mar.
2008	**D**	**X**	**J**

Ordenando los días de la semana entre C y C+6, como muestra la siguiente tabla, observamos

que cada uno aparece al menos una vez. Esto significa que independientemente del valor de C, el día 13 cae al menos una vez en cada uno de los días de la semana. Luego **es imposible que exista un año en el que ningún 13 caiga en martes**
. Lo sentimos por los supersticiosos.

Día de semana del 13	Frecuencia (año de 365 días)	Frecuencia (año bisiesto)
C	2	3
C + 1	1	1
C + 2	1	1
C + 3	3	2
C + 4	1	2
C + 5	2	1
C + 6	2	2

Es más, gracias a esta tabla de frecuencias también podemos predecir cuáles son los *fatídicos* años en donde hasta tres veces el día 13 coincide en martes: son los años no bisiestos en donde el 13 de enero (C) corresponde a sábado (y por lo tanto C+3 a martes) y los años bisiestos en donde el 13 de enero cae en martes. Eso fue lo que sucedió en el 2007 y, a *fortunadamente*
, no volverá a suceder hasta el año 2018.

Mientras tanto, vamos a ver qué tiene que ver todo esto con la música.

La Octava

Si emitimos un sonido -Sonido 1- a cierta frecuencia (es decir, con cierta agudeza o gravedad) y lo volvemos a emitir a doble frecuencia -Sonido 2- obtenemos un sonido más agudo que el primero. Sin embargo, percibimos cierta similitud entre ambos sonidos. Más aún, escuchados simultáneamente, comprobamos que se "acoplan" bien, de forma agradable, con ***consonancia***
.

Existe una causa física para este "perfecto acople". Generalmente, al vibrar, un objeto no emite una única frecuencia ***fundamental*** F, sino que además emite otros sonidos *parciales*, de menor intensidad, que en muchos casos son
armónicos
, es decir, sonidos cuya frecuencia es un múltiplo de la fundamental. Este fenómeno ya se ha analizado en el artículo
 Análisis Armónico
.

Lo que percibimos como "similitud" no es más que la coincidencia de frecuencias entre todos los armónicos, incluido el primero o fundamental, del Sonido 2 con los armónicos pares del Sonido 1, como podemos ver en la siguiente tabla (en color naranja, las frecuencias fundamentales de cada uno):

Sonido 1	F	2 F	3 F

Sonido 2	2 F	4 F	6 F

A la *distancia* (entendiendo como tal la razón o proporción entre frecuencias, en este caso 2:1) de ambos sonidos le llamamos ***octava***. El motivo de este nombre se verá más adelante. Por otra parte, también se conoce como octava al *intervalo* de frecuencias entre dos sonidos separados por esa distancia.

Lá, la-la lá

Veamos un ejemplo. La frecuencia que se toma como referencia para afinar un piano es la de 440 Hz, correspondiente a una nota **La**. Tomando esta frecuencia como Sonido 1, decimos que el Sonido 2 de 880 Hz está una octava por encima porque la razón de sus frecuencias es 2:1.

¿Cómo llamaremos al nuevo sonido de 880 Hz? Pues exactamente **igual** que al que está una octava por debajo: **La**. Pero, ¿por qué? ¿No es liar las cosas llamarle igual a dos sonidos diferentes?

El origen de conservar el mismo nombre reside en la diferencia de *altura* (percepción de la frecuencia) entre las voces humanas (y muchos instrumentos). Las hay más agudas y las hay más graves. Las de los hombres suelen ser más graves que las de las mujeres. Si varias personas cantan la misma melodía “Do-Sol-Fa” cada una lo hará con distinta frecuencia, pero aún así reconocemos en cada una de esas voces los mismos *intervalos* (de Do a Sol y de Sol a Fa), independientemente de la octava, por lo que nos parece que cantan “lo mismo”. Es decir, el oído atiende más a las distancias entre frecuencias que a las propias frecuencias, siempre que exista consonancia entre los armónicos (siempre que *armonicen*).

Como vemos, la situación es muy similar a la de los días de la semana. El domingo 20 no es el mismo día que el domingo 27, pero su distancia al resto de los días de la semana permanece invariable. A cada domingo le sucede, desgraciadamente, un lunes.

En música, se llama [**La**] a la clase de equivalencia formada por la frecuencia 440 Hz y todos sus múltiplos y submúltiplos, no necesariamente enteros, obtenidos al multiplicar o dividir esa frecuencia por una potencia de 2. Así, si deseamos determinar la frecuencia de una nota musical no basta con saber su nombre (Do, La, Mi...) sino que además debemos señalar la octava correspondiente.

Ya habíamos visto que para determinar un día del año no basta decir si es lunes o jueves, se debe especificar la semana. Igualmente, necesitamos numerar las octavas para poder concretar el sonido de una nota.

Por un convenio establecido en función de la capacidad de percepción sonora del oído humano, la octava 4 corresponde al intervalo que incluye a la nota La de 440 Hz, **La_4**, mientras que la nota La de 880 Hz, denotada como **La_5**, corresponde a la octava 5. En la siguiente imagen las teclas del piano correspondientes a La_4 y La_5, normalmente blancas, aparecen ahora en rojo:

En la siguiente tabla se puede ver la correspondencia entre cada octava de un piano y la frecuencia de la nota **La** dentro de ella (al menos teóricamente, pues en la práctica se reajustan las frecuencias a medida que se alejan del La_4 buscando un sonido más acorde con la percepción esperada por el oído):

Número de octava	0	1	2	3	4	5	6	7
Frecuencia de La (Hz)	27,5	55	110	220	440	880	1.76	3.520

El oído humano puede percibir un rango mayor de frecuencias, desde los 16 ó 20 Hz hasta los 16.000 ó 20.000 Hz, es decir, casi diez octavas. No obstante, a partir de unos 4.000 Hz los sonidos se perciben demasiado agudos tanto para resultar agradables como para diferenciar con precisión su altura.

Doble o nada

Una ***progresión geométrica*** es una sucesión de números en donde, a partir de un número inicial, la razón entre cada término y el anterior siempre es constante (esta constante se denomina, precisamente, ***razón***).

En la tabla anterior se observa que cada frecuencia se duplica entre una octava y la siguiente, lo cual es evidente por la propia definición de octava.

Esta secuencia abarca los primeros términos de una progresión geométrica cuyo primer término, La_0, corresponde 27,5 Hz y cuya razón es 2.

El término general, es decir, la frecuencia correspondiente a la nota **La** de una octava cualquiera a partir de la inicial, se puede expresar entonces como:

$La_n = La_0 \cdot 2^n$

La expresión anterior sintetiza cada uno de los elementos de la clase [**La**]. Por supuesto, esta relación se puede generalizar a cualquier otra nota. Por ejemplo:

$Do_n = Do_0 \cdot 2^n$

Teclas blancas: incongruencias módulo 7

Volvamos al piano, con sus 52 teclas blancas (del total de 88 teclas):

Observamos que cada octava, entre la 1 y la 7, comprende siete teclas blancas que, de izquierda a derecha, corresponden a las notas Do, Re, Mi, Fa, Sol, La y Si.

Podemos comprobar la gran similitud entre las definiciones de octava y nota con las ya mencionadas de semana y día de semana:

semana 1 = $\{L_1, M_1, X_1, J_1, V_1, S_1, D_1\}$
octava 1 = $\{Do_1, Re_1, Mi_1, Fa_1, Sol_1, La_1, Si_1\}$

[viernes] = $\{V_0, V_1, V_2, V_3, V_4, V_5...\}$ = {5, 12, 19, 26, 33, 40...}
[La] = $\{La_0, La_1, La_2, La_3, La_4, La_5...\}$ = {27.5, 55, 110, 220, 440, 880...}

¿Estamos entonces ante la misma situación que los siete días de la semana, correspondiendo Do al lunes y Si al domingo? **No exactamente, por desgracia.**

La diferencia fundamental reside en que la distancia de un lunes al día siguiente, martes (más precisamente, la distancia entre el comienzo de ambos días), es de un día, la misma que hay entre un miércoles y su consecutivo jueves. Sin embargo, la "distancia sonora" (razón entre frecuencias) entre el Do y el Re es mayor que entre el Mi y el Fa.

Pero, ¡esto es un gran problema! Si las distancias no son iguales, los cálculos con aritmética modular se vienen abajo, pues sólo son practicables con notas del mismo nombre (separadas un número entero de octavas). Así que... ¡es preciso modular la escala!

El ciclo de quintas

El origen de este problema se remonta al nacimiento de esas notas, cuyos intervalos o distancias fueron establecidas por los pitagóricos. En esencia, los pitagóricos aplicaron sistemáticamente dos intervalos fijos, la octava y la quinta, para obtener los demás, aparte de la cuarta (ver el [artículo de Vicente Liem]() ya mencionado). Los intervalos resultantes resultaron simples, pero desiguales, dando lugar a la popular ***escala diatónica***: Do, Re, Mi...

La ***quinta*** es el intervalo que separa la altura de sonidos cuyas frecuencias están en proporción 3:2.

Así, partiendo del La$_4$, y subiendo cada vez una quinta, se obtienen las siguientes frecuencias:

Número de quintas aplicadas	0	1	2	3	4
Frecuencia (Hz)	440	660	990	1.48[illegible]	2.227,5

Ejemplificaremos ahora el método seguido por los pitagóricos para construir la escala diatónica. Los pitagóricos se dieron cuenta que había cierta relación entre la longitud de una cuerda y el sonido que producía. Hoy sabemos que esa relación se basa en que la frecuencia es inversamente proporcional a la longitud.

Empezamos con una frecuencia determinada (correspondiente a la frecuencia fundamental de vibración de una cuerda de longitud dada). Supondremos, para mayor claridad, que esa frecuencia F es justamente la del Do central del piano: Do$_4$. Sigamos los siguientes pasos:

- **Do$_4$** = F (*unísono*).

- Dividiendo la cuerda en dos partes iguales (no hace falta cortarla, basta sujetarla), se obtiene una cuerda la mitad de larga que, al ser pulsada, emite una frecuencia fundamental exactamente el doble que la anterior: **Do$_5$** = 2 F. Ya tenemos el intervalo de **octava** (en griego, *diapasón*), que es el intervalo que queremos dividir en intervalos menores.

- Dividiendo la cuerda original en tres partes iguales, la cuerda de longitud 2/3 emite una frecuencia fundamental exactamente 3/2 de veces la original: **Sol$_4$** = 3/2 F. Este es el intervalo de **quinta** (en griego, *diapente*).

- Dividiendo la cuerda original en cuatro partes iguales, la cuerda de longitud 3/4 emite una frecuencia fundamental exactamente 4/3 de veces la original: **Fa$_4$** = 4/3 F. Este es el intervalo de **cuarta** (en griego, *diatesaron*).

Observemos que las notas creadas guardan gran consonancia entre sí (entre paréntesis se señala el número del armónico correspondiente):

Unísono	: Do$_4$	F	(1)
	2 F		

(2)	3 F		
(3)	4 F		
(4)	5 F		
(5)	6 F		
(6)	7 F		
(7)	8 F		
(8)	9 F		
(9)	10 F		
(10)	11 F		
(11)	12 F		
(12)			
Octava	: Do	5	2 F
(1)	4 F		
(2)	6 F		
(3)	8 F		
(4)	10 F		
(5)	12 F		
(6)			
Quinta	: Sol	4	3/2F
(1)	3 F		
(2)	6 F		
(4)	9 F		
(6)	12 F		
(8)			
Cuarta	: Fa	4	4/3F
(1)	4 F		
(3)	8 F		
(6)	12 F		
(9)			

Ahora proseguimos con el método conocido como ***ciclo de quintas***:

- Subiendo una quinta a partir de la quinta, es decir, tomando 4/9 de la longitud de la cuerda obtenemos la nota Re$_5$ = 9/4 F. Como hemos sobrepasado la octava, nos quedamos con el doble de esa longitud, y por tanto la mitad de frecuencia: **Re**$_4$ = 9/8 F. Este es el intervalo de **segunda**.

- Subiendo de nuevo una quinta, es decir, tomando 2/3 de 8/9 de la longitud original, obtenemos una nueva longitud de cuerda cuya frecuencia corresponde a **La**$_4$ = 27/16 F. Este es el intervalo de **sexta**.

- Subiendo otra quinta a partir de la anterior obtenemos Mi$_5$ = 81/32 F. Como nos volvemos a pasar de octava, duplicamos la cuerda para obtener la mitad de frecuencia: **Mi**$_4$ = 81/64 F. Este es el intervalo de **tercera**.

- Por último, subiendo otra quinta más a partir de la anterior obtenemos **Si**$_4$ = 243/128 F. Este es el intervalo de **séptima**

.

Veamos como quedaron las frecuencias, tomando F como unidad:

Nota	Do	Re	Mi
Frecuencia	**1**	**9**	

8	**81**
64	**4**
3	**2**
3	**27**
16	**243**
128	**2**
Factor de incremento	**9**
8	**9**
8	**256**
243	**9**
8	**9**
8	**9**
8	**256**
243	

Pulsa en el siguiente enlace para ver el proceso seguido, paso a paso: construcción de la escala .

El nombre de la Octava

Ahora ya podemos conocer la procedencia de este nombre. Corresponde al número de notas que marcan la escala diatónica. Como hay 7 intervalos (5 de tono y 2 de hemitono), el número total de notas necesarias para definirlos es ocho. Por ejemplo: Do-Re-Mi-Fa-Sol-La-Si-Do. Así, si la primera nota es un Do, la “octava” nota también lo es.

Por ejemplo, si tocamos un Re, decimos que para el próximo Re falta una octava. Pero también llamamos octava al intervalo que abarca el Re, Mi, Fa, Sol, La, Si y Do, es decir, a la serie de notas comprendidas entre dos Re consecutivos.

Escala, modo y tonalidad

Podemos imaginar una escala musical como la distribución de peldaños, no necesariamente de la misma altura, en una escalera. Esta distribución es periódica, cualquier tramo con un número predeterminado de peldaños se repite a lo largo de la escalera. Los protagonistas de *Sonrisas y Lágrimas*

juegan con esta analogía al final de la famosa escena de la canción
Do-Re-Mi
.

En la escala diatónica, este número predeterminado es de 7 peldaños. Si empezamos en la nota Do, estos 7 peldaños son: el que va de Do a Re, de Re a Mi, etc., hasta el último que une Si con el Do correspondiente al siguiente tramo.

El problema es que, como hemos visto, la altura de estos peldaños en la escala diatónica no es siempre igual. Hay peldaños "altos" como el que va de Do a Re, y peldaños "bajos", como el que va de Mi a Si. A la altura del peldaño alto se le llama ***tono*** (T = 9/8) y a la del peldaño bajo ***hemitono***
(h = 256/243).

Por ejemplo, a partir de un Do, resulta que las sucesivas distancias o "subidas" son las que muestra la siguiente tabla:

Nota	**Do**	**Re**	**Mi**
Subida	**T**	**T**	**h**

Toda la escalera seguirá entonces el patrón:

...T h T T h T T T h T T h T T T h T T h T T T h T T h T T ...

¿Y por qué partir de Do? Podemos elegir otro peldaño de partida para establecer otro tramo periódico. Por ejemplo, partiendo de La obtenemos la misma escala (escalera):

Nota	**La**	**Si**	**Do**

Subida	**T**	**h**	**T**

Como se ve, la distribución de los peldaños en el tramo ha cambiado, pero la distribución de toda la escalera permanece invariable.

Podemos obtener distintos tramos, pero en esencia la escala no varía. A cada uno de estos tramos-patrón se le conoce como ***modo***, y a su primera nota ***tónica***. Los dos modos anteriormente representados son los modos principales usados en la música occidental. La información conjunta de la tónica y el modo se denomina
tonalidad
.

Así, a la secuencia **T T h T T T h** se le conoce como **modo Mayor**, y a la tonalidad que sigue esa secuencia comenzando en Do se le llama "Do mayor".

Análogamente, la serie **T h T T h T T** se denomina **modo Menor**, y la tonalidad que sigue esa pauta empezando en La se llama "La menor".

Pulsa en los siguientes enlaces para oír ambos modos y sendas composiciones basadas en ellos:

Modo	Ejemplos

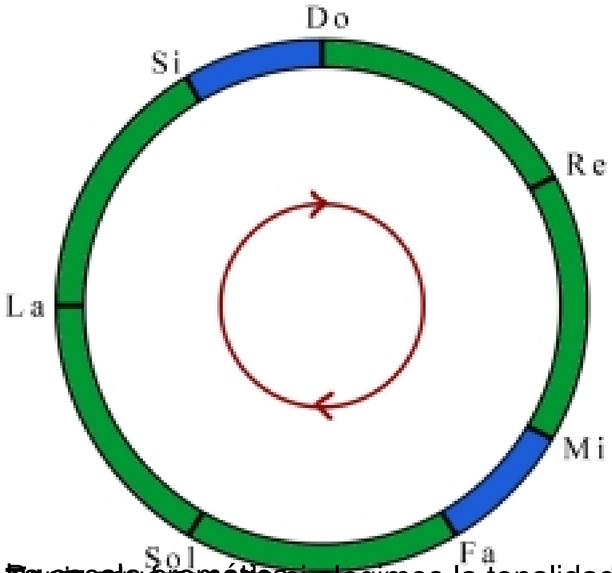
Mayor:	**T**	**T**	**h**	**T**

Tramo de la escala
Composición de Do mayor

Menor:	**T**	**h**	**T**	**T**

Tramo de la escala
Composición en La menor

El siguiente gráfico muestra la distribución periódica de la escala diatónica. Para establecer una tonalidad basta elegir una nota inicial (tónica) y seguir el sentido señalado.


Do
Re
Mi
Fa
Sol
La
Si