

Escrito por Kristy Yun y Mariana Montiel (Georgia State University)  
Viernes 20 de Mayo de 2016 17:00

---

Este mes vamos a presentar un trabajo hecho por Kristy Yun y Mariana Montiel, de *Georgia State University*, en Atlanta (donde estoy pasando mi sabático). Kristy es una estudiante de licenciatura que está a punto de obtener su título. En las universidades americanas los estudiantes de licenciatura acuden a unas conferencias llamadas conferencias de investigación para alumnos de grado. En esas conferencias los alumnos de licenciatura presentan pequeños proyectos de investigación supervisados por un profesor. Ni en el campo de las matemáticas ni en el de la música existen en España estas conferencias. Y es una pena. Primero, habla del nivel de nuestras universidades. ¿Es que no pueden nuestros alumnos de los últimos años de grado adentrarse en el mundo de la investigación y presentar pequeños resultados en una conferencia de estas características? Constituyen una experiencia previa para ellos que es muy valiosa en tantos aspectos: se enfrentan a problemas de investigación; se prueban a sí mismos; conviven con su profesor; supone una gran emoción presentar su trabajo antes sus compañeros (normalmente, en forma de póster o de comunicación corta); ponen en práctica sus habilidades de escritura y orales, entre otras.

Me llamó la atención el trabajo de Kristy Yun y Mariana Montiel en la conferencia de este año y les propuse publicarlo en formato divulgativo en esta columna. Les agradezco profundamente que hayan aceptado la invitación. Espero que este ejemplo cunda y empecemos a celebrar este tipo de conferencias para alumnos de licenciatura en España también de modo generalizado. Los investigadores más productivos que he conocido siempre han tenido una amplia red de alumnos a su alrededor con quienes han desarrollado relaciones personales excelentes y en quienes han podido depositar sus ideas para llevarlas a cabo, todo ello en el contexto de una cálida simbiosis humana y científica.

***Paco Gómez Martín (Universidad Politécnica de Madrid)***

Resumen del estudio

Las improvisaciones en el jazz consisten en ciertos patrones rítmicos y melódicos que oímos en cierto orden. Por medio del estudio de la génesis de estos patrones podemos entender el proceso de la toma de decisiones en tiempo real en el contexto de una estructura dada en que consiste la improvisación. No hay teorías que describan a fondo y con precisión la improvisación, pero entre las existentes destacan dos escuelas de pensamiento: una es la teoría basada en patrones; la otra se basa en gramáticas o reglas. La primera teoría propone que los improvisadores se nutren de un corpus de patrones rítmicos y melódicos memorizados

## 76. (Mayo 2016) Cadenas de Markov con restricciones aplicadas a modelos cognitivos en la improvisación

Escrito por Kristy Yun y Mariana Montiel (Georgia State University)

Viernes 20 de Mayo de 2016 17:00

---

y que dichos patrones se insertan en el proceso de una improvisación en curso dentro de unas ciertas reglas de estilo. Otra teoría, encontrada con la primera, asevera que los improvisadores generan notas por medio de los algoritmos y las reglas del jazz tonal, sin la ayuda de patrones memorizados. Para comprobar la validez de estas teorías, en un estudio previo [7] llevado a cabo por Martin Norgaard y sus colaboradores se analizó un corpus de 48 solos improvisados por el gran saxofonista de jazz Charlie Parker. Los resultados del estudio mostraron que la incidencia de patrones en el corpus de Charlie Parker coincide con el algoritmo basado en patrones implementado en ese estudio. En cambio, las improvisaciones generadas por Impro-Visor, un software desarrollado en base a gramáticas y reglas tomadas de los acordes musicales introducidos por el usuario, no generó una presencia de patrones similar a la del corpus real de Parker. En vista de los resultados positivos del algoritmo, el siguiente paso era la incorporación de acordes; sin embargo, se quería evitar que dichos acordes dictasen la melodía y el contorno de la salida musical de manera excesivamente estricta, ya que la coincidencia de patrones era muy apegada a las improvisaciones de Parker. Se vio que una posible solución era el empleo de modelos de Markov no homogéneos, en que los acordes se entendiesen como restricciones. Cabe mencionar que podría haber aplicaciones de ese algoritmo que trascendiesen el género de jazz y aún la música, ya que se basa en patrones. La creatividad en áreas tales como los video juegos se puede modelar, dado que los jugadores deben responder de forma creativa en tanto adquieren ciertos patrones de respuesta con restricciones inherentes al contexto.

### Introducción

Normalmente, cuando los músicos profesionales de jazz tocan en pequeños grupos no leen partituras, sino que improvisan. Los ejecutantes escogen frases que al público podría parecerles prescritas, pero que realmente se crean en el acto. Estos músicos profesionales desarrollan una forma muy intrincada de tema y variación; cada uno es consciente de su tonada y su papel; esto explica la razón por la que la improvisación de jazz sirve como un paradigma excelente para el estudio de la creatividad en tiempo real. La improvisación en el jazz es también un prototipo de la actividad mental común al reconocimiento del habla y otras áreas de interés en la inteligencia artificial.

Actualmente hay dos teorías encontradas en el estudio de la improvisación en el jazz: (1) el enfoque basado en los patrones y (2) el enfoque basado en reglas; la figura 1 ilustra esta situación esquemáticamente (se ha dejado el texto en el inglés original).

## 76. (Mayo 2016) Cadenas de Markov con restricciones aplicadas a modelos cognitivos en la improvisación

Escrito por Kristy Yun y Mariana Montiel (Georgia State University)

Viernes 20 de Mayo de 2016 17:00

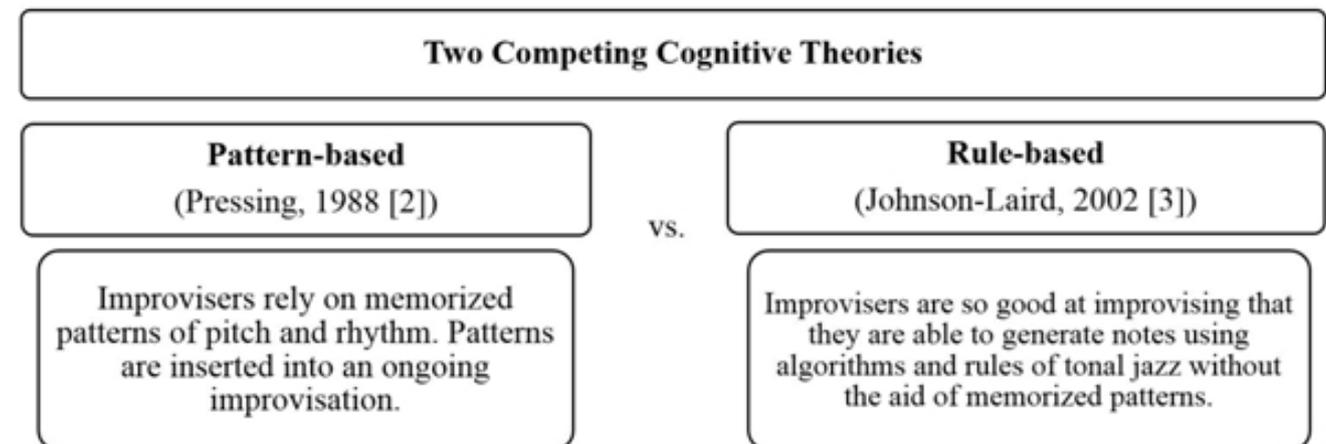


Figura 2 (primera parte) Comparación del porcentaje de patrones que ocurren en el corpus

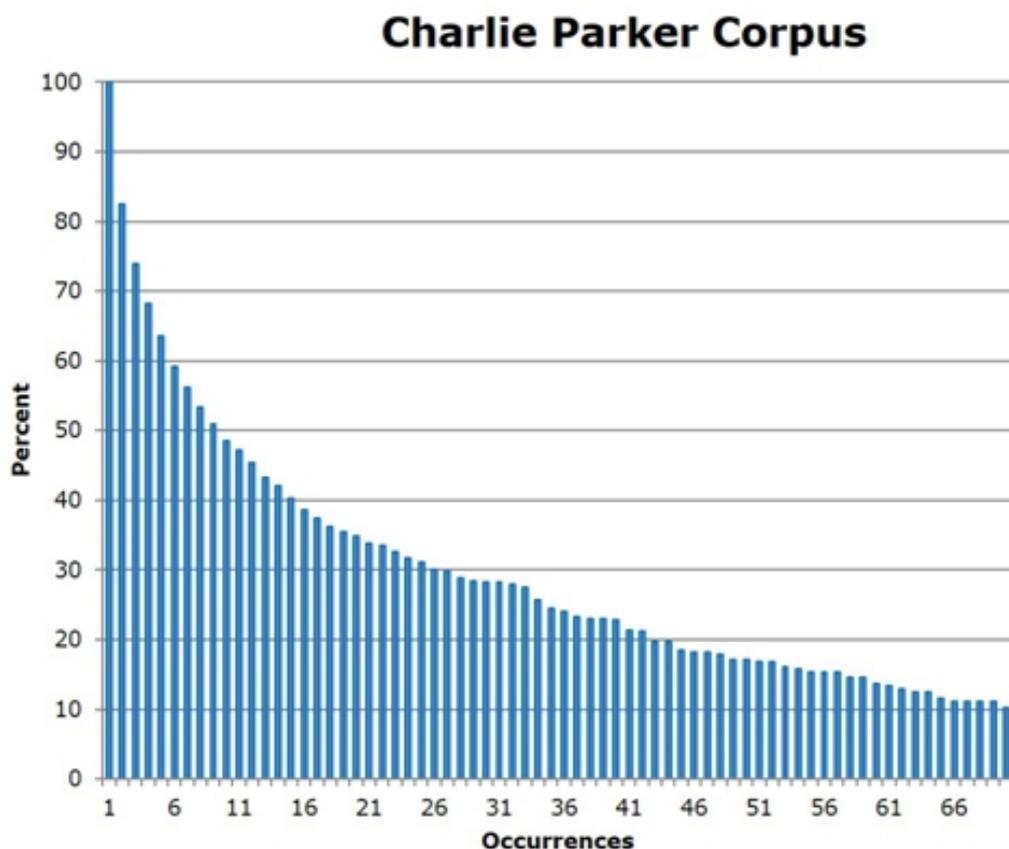


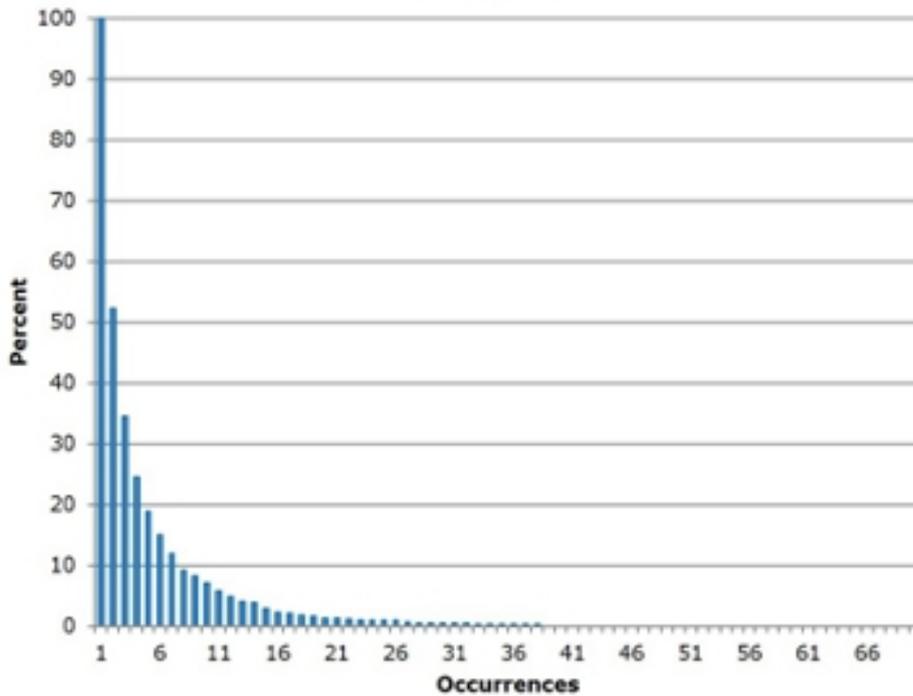
Figura 2 (primera parte) Comparación del porcentaje de patrones que ocurren en el corpus

## 76. (Mayo 2016) Cadenas de Markov con restricciones aplicadas a modelos cognitivos en la improvisación

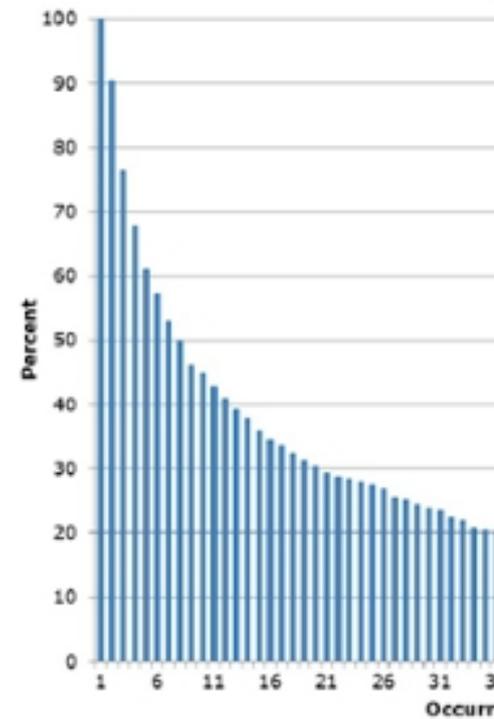
Escrito por Kristy Yun y Mariana Montiel (Georgia State University)

Viernes 20 de Mayo de 2016 17:00

### Impro-Visor (using Charlie Parker Corpus)



### Our Melody



El modelo de Markov de orden 1 se utiliza para generar una melodía aleatoria a partir de un corpus de melodías. El modelo de Markov de orden 1 se utiliza para generar una melodía aleatoria a partir de un corpus de melodías.

		Tomorrow's Weather		
		Sunny	Rainy	Foggy
Today's Weather	Sunny	0.8	0.05	0.15
	Rainy	0.2	0.6	0.2
	Foggy	0.2	0.3	0.5

**Tabla 1.** Probabilidades escogidas aleatoriamente para el tiempo.

76. (Mayo 2016) Cadenas de Markov con restricciones aplicadas a modelos cognitivos en la improvisación

Escrito por Kristy Yun y Mariana Montiel (Georgia State University)  
 Viernes 20 de Mayo de 2016 17:00

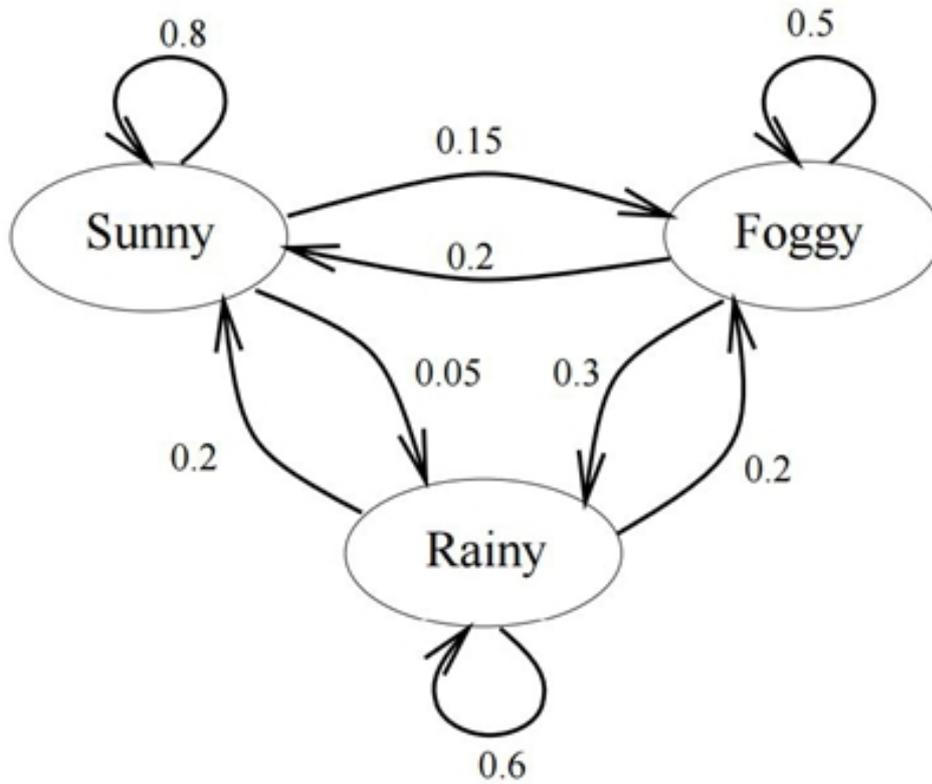


Figura 9. Autómatas estocásticos de la Teoría de cadenas de Markov que traduce la posibilidad de que mañana sea un día soleado, nublado o lluvioso, dado el comportamiento del último día de la fiesta. Multiplicando

$(\frac{1}{3} \ \frac{1}{2} \ \frac{1}{6})$  por el vector de probabilidad inicial  $(\frac{1}{3} \ \frac{1}{2} \ \frac{1}{6})^T$  se obtiene el vector de probabilidad de que mañana sea un día soleado, nublado o lluvioso, respectivamente.



Figura 10. Ejemplos de secuencias de notas de un triángulo de Pascal para estimar  $M$ .

$$\begin{matrix}
 & C & D & E \\
 C & \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\
 D & \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \\
 E & \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}
 \end{matrix}$$

Basado en los ejemplos de las secuencias de notas de un triángulo de Pascal para estimar  $M$ , se puede observar que la totalidad de

## 76. (Mayo 2016) Cadenas de Markov con restricciones aplicadas a modelos cognitivos en la improvisación

Escrito por Kristy Yun y Mariana Montiel (Georgia State University)  
Viernes 20 de Mayo de 2016 17:00

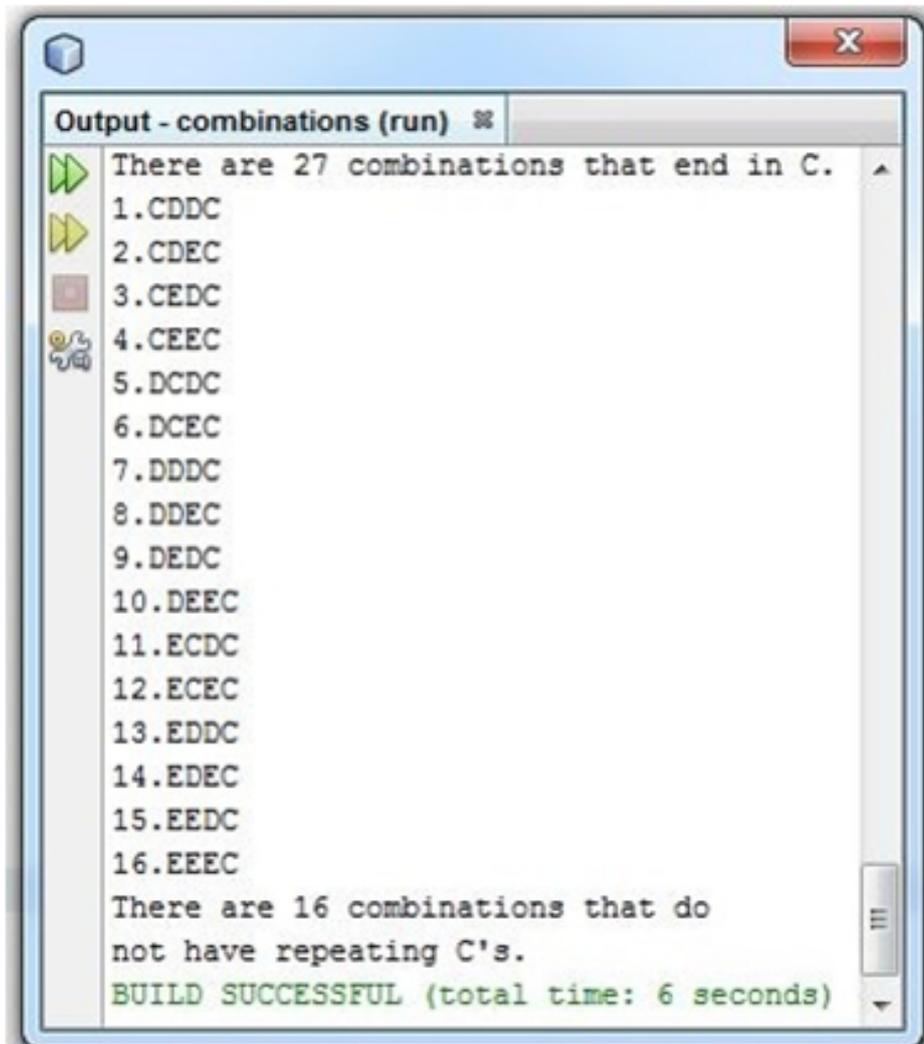


Figura 15. Todas las posibles combinaciones de melodías de 4 notas que satisfacen la

Melodies	Probabilities	Melodies	Probabilities
CDDC	2/75	DEDC	3/100
CDEC	1/45	DDEC	1/100
CEDC	1/30	ECDC	1/30
DCDC	3/25	ECEC	1/72
DCEC	1/20	EDDC	1/100
DDDC	3/250	EDEC	1/120

$$s = 416/1125$$

Tabla 1. Probabilidades de las melodías de 4 notas que satisfacen la restricción de no tener más de un C en una melodía de 4 notas.

$$\begin{aligned}
 PM(CDDC) &= PM(C) PM(D|C) PM(D|D) PM(C|D) \\
 &= (1/3)(2/3)(1/5)(3/5) = 2/75.
 \end{aligned}$$

Tabla 2. Probabilidades de las melodías de 4 notas que satisfacen la restricción de no tener más de un C en una melodía de 4 notas.

## 76. (Mayo 2016) Cadenas de Markov con restricciones aplicadas a modelos cognitivos en la improvisación

Escrito por Kristy Yun y Mariana Montiel (Georgia State University)

Viernes 20 de Mayo de 2016 17:00

$$\begin{array}{ccccccc}
 V_1 & \xrightarrow{K_1} & V_2 & \xrightarrow{K_2} & V_3 & \xrightarrow{K_3} & V_4 \\
 \{C,D,E\} & & \{C,D,E\} & & \{D\} & & \{C\}
 \end{array}$$

donde  $K_i$  es el estado de transición entre  $Z^{(i-1)}$  a  $Z^{(i)}$ . Como  $Z^{(i)}$  es una matriz de transición que depende

- **Inicialization:**  
 $Z^{(0)} \leftarrow M_0$  (the prior probabilities of  $M$ ),  
 $Z^{(i)} \leftarrow M, \forall i = 1, \dots, L - 1$  (the transitions).
- For each  $a_k \in A$  removed from the domain of  $V_i$ :  
 $Z_{j,k}^{(i)} \leftarrow 0, \forall j = 1, \dots, n$  (set the  $k$ -th column to zero).
- All forbidden transitions in the binary constraints should also be removed from the matrices:  
 $Z_{j,k}^{(i)} \leftarrow 0, \forall i, j, k$  such that  $B_i(a_j, a_k) = \text{false}$ .

mantenemos las siguientes matrices:

$$Z^{(0)} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 & 1/6 \end{pmatrix} \quad Z^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 1/3 \\ 3/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Z^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \quad Z^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3/5 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Finalmente, para construir la matriz de transición definitiva  $Z^{(L)}$  a partir de  $Z^{(L-1)}$  se

$$\begin{aligned}
 \tilde{m}_{j,k}^{(L-1)} &= \frac{z_{j,k}^{(L-1)}}{\alpha_j^{(L-1)}}, \quad \alpha_j^{(L-1)} = \sum_{k=1}^n z_{j,k}^{(L-1)} \\
 \tilde{m}_{j,k}^{(i)} &= \frac{\alpha_k^{(i+1)} z_{j,k}^{(i)}}{\alpha_j^{(i)}}, \quad \alpha_j^{(i)} = \sum_{k=1}^n \alpha_k^{(i+1)} z_{j,k}^{(i)} \quad 0 < i < L - 1 \\
 \tilde{m}_k^{(0)} &= \frac{\alpha_k^{(1)} z_k^{(0)}}{\alpha^{(0)}}, \quad \alpha^{(0)} = \sum_{k=1}^n \alpha_k^{(1)} z_k^{(0)}
 \end{aligned}$$

Por medio de la relación arriba expuesta, logramos las siguientes matrices de transición para

## 76. (Mayo 2016) Cadenas de Markov con restricciones aplicadas a modelos cognitivos en la improvisación

Escrito por Kristy Yun y Mariana Montiel (Georgia State University)

Viernes 20 de Mayo de 2016 17:00

- $i = L - 1 = 3$

$$\alpha_1^{(3)} = \sum_{k=1}^3 z_{1,k}^{(3)} = 0 + 0 + 0 = 0$$

$$\alpha_2^{(3)} = \sum_{k=1}^3 z_{2,k}^{(3)} = 3/5 + 0 + 0 = 3/5$$

$$\alpha_3^{(3)} = \sum_{k=1}^3 z_{3,k}^{(3)} = 1/2 + 0 + 0 = 1/2$$

$$\tilde{M}^{(3)} = (\tilde{m}_{j,k}^{(3)}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $i = 2$

$$\alpha_1^{(2)} = \sum_{k=1}^3 \alpha_k^{(3)} z_{1,k}^{(3)} = (0, 3/5, 1/2) \bullet (0, 2/3, 1/3) = 17/30$$

$$\alpha_2^{(2)} = \sum_{k=1}^3 \alpha_k^{(3)} z_{2,k}^{(3)} = (0, 3/5, 1/2) \bullet (0, 1/5, 1/5) = 11/50$$

$$\alpha_3^{(2)} = \sum_{k=1}^3 \alpha_k^{(3)} z_{3,k}^{(3)} = (0, 3/5, 1/2) \bullet (0, 1/2, 0) = 3/10$$

$$\begin{aligned} \tilde{M}^{(2)} = (\tilde{m}_{j,k}^{(2)}) &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{3/5 \times 2/3}{17/30} & \frac{1/2 \times 1/3}{17/30} \\ 0 & \frac{3/5 \times 1/5}{11/50} & \frac{1/2 \times 1/5}{11/50} \\ 0 & \frac{3/5 \times 1/2}{3/10} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 12/17 & 5/17 \\ 0 & 6/11 & 5/11 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Para los demás cálculos similares para  $i = 1$  y  $i = 0$ , como resultado contamos con las siguientes

## 76. (Mayo 2016) Cadenas de Markov con restricciones aplicadas a modelos cognitivos en la improvisación

Escrito por Kristy Yun y Mariana Montiel (Georgia State University)

Viernes 20 de Mayo de 2016 17:00

$$\tilde{M}^{(0)} = (185/832 \quad 999/1664 \quad 295/1664)$$

$$\tilde{M}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 22/37 & 15/37 \\ 85/111 & 11/111 & 5/37 \\ 85/118 & 33/118 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{M}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 12/17 & 5/17 \\ 0 & 9/11 & 5/11 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \tilde{M}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El número de coeficientes para construir la matriz de Markov con restricciones que se muestran en la figura anterior es 18, ya que el número de probabilidades

$$\tilde{M}^{(0)} = \left( \frac{185}{832} \quad \frac{999}{1664} \quad \frac{295}{1664} \right) = (0.22 \quad 0.60 \quad 0.18)$$

$$M = (1/3 \quad 1/2 \quad 1/6) = (0.33 \quad 0.50 \quad 0.17)$$

La tabla 2 muestra los coeficientes de las probabilidades de transición de las bases de factores constantes, de

Melodies	Probabilities	Melodies	Probabilities
CDDC	61/969	DEDC	25/353
CDEC	16/305	DDEC	11/466
CEDC	24/305	ECDC	24/305
DCDC	83/293	ECEC	2/61
DCEC	36/305	EDDC	11/466
DDDC	10/353	EDEC	6/305

El número de coeficientes para construir la matriz de Markov con restricciones que se muestran en la figura anterior es 18, ya que el número de probabilidades