

1. Introducción

En el artículo de este mes vamos a tratar el tema de la formación científica de los músicos. Aquí surgen varias preguntas, casi de modo irrefrenable:

- ¿No debería tener toda persona de artes o letras un mínimo de formación científica? En particular y dada las potenciales conexiones entre ciencia y arte, ¿no deberían disfrutar los músicos de esa formación? ¿No debería impartirse tal formación en los estudios reglados?
- ¿Por qué negar los aspectos cuantitativos de la música? Estos existen y pueden explicarse a partir de las matemáticas y la física.
- Después de décadas de investigación matemática sobre la música, ¿por qué no usar ese conocimiento para diseñar nuevos modos de enseñar música? Estos modos supondrían, al menos, una enseñanza más rica en conceptos y recursos.
- Las matemáticas y la música tienen conexiones en al menos cuatro niveles [\[Be00\]](#): en el de la física del sonido, en el del lenguaje musical, en el de la estética y el metafórico. Este último nivel ha de entenderse como una conexión basada en el proceso y la analogía, ambos conceptos comunes a las matemáticas y a la música. Entonces, ¿no pueden aprovecharse esas conexiones para diseñar asignaturas que tengan un enfoque interdisciplinar? En un mundo cada día más interdisciplinar, ¿por qué empeñarse en una enseñanza profundamente reduccionista?
- En ciertas especialidades musicales la formación científica -dados los avances actuales- se hace imprescindible, como por ejemplo en la musicología cuantitativa (a veces incluso llamada musicología computacional) o en teorías compositivas modernas (la música de Xenakis, la música fractal, la música algorítmica, la música electrónica). ¿Por qué en nuestros conservatorios no se imparte una enseñanza que incluya *algo* de ciencia? ¿Por qué dejar cojos a nuestros futuros músicos, sea cual sea su especialidad, de esta importante formación?
- A un nivel más abstracto, las matemáticas y la música tienen como característica común un agudo sentido de lo estético. Los grandes matemáticos y los grandes músicos han hablado con arrobo de las experiencias estéticas que les ha proporcionado su actividad. ¿No se pueden intercambiar esas experiencias a través de un plan de estudios con ambiciones?

Antes de que el lector proteste por el aparente sesgo de introducir las matemáticas en la música, quiero defender vehementemente la introducción de la música en la enseñanza científica. Creo que en toda carrera científica debe haber asignaturas de letras de tal modo que los alumnos que salgan de nuestras universidades sean verdaderos humanistas. En

42. (Diciembre 2012) Enseñanza de música por vía de las matemáticas I

Escrito por Paco Gómez Martín (Universidad Politécnica de Madrid)
Miércoles 05 de Diciembre de 2012 15:00

teoría, las asignaturas de libre elección estaban para eso, a imagen del modelo americano, pero se redujeron a asignaturas complementarias bien por las habituales y no por ello menos patéticas luchas de poder bien para paliar la reducción de horas en los nuevos planes de estudios.

En cierto punto de la conversación con Ricardo salieron a colación varios libros que enseñan teoría de la música básica a través de las matemáticas. Dichos libros se usan en conservatorios del extranjero y, hasta lo que alcanza mi conocimiento, no se usan en España. Uno de los libros que se mencionó es *Foundations of diatonic theory* (Fundamentos de teoría diatónica), de Timothy Johnson

[\[Joh03\]](#)

. Creo que la virtud de este libro está en la explicación de conceptos musicales a partir de unos presupuestos matemáticos mínimos. En realidad, para comprender el libro lo que único que se requiere es predisposición a

razonar

y unos rudimentos de aritmética. A partir de ahí, el libro constituye una gozosa travesía por la teoría de escalas. Este artículo inaugura una serie que analizará en detalle el libro de Johnson. Para empezar, déjeme el lector mostrarle el índice del libro (mi traducción):

Prefacio

42. (Diciembre 2012) Enseñanza de música por vía de las matemáticas I

Escrito por Paco Gómez Martín (Universidad Politécnica de Madrid)
Miércoles 05 de Diciembre de 2012 15:00

Para el instructor

Agradecimientos

42. (Diciembre 2012) Enseñanza de música por vía de las matemáticas I

Escrito por Paco Gómez Martín (Universidad Politécnica de Madrid)
Miércoles 05 de Diciembre de 2012 15:00

La visión de las matemáticas a través del currículo educativo

42. (Diciembre 2012) Enseñanza de música por vía de las matemáticas I

Escrito por Paco Gómez Martín (Universidad Politécnica de Madrid)

Miércoles 05 de Diciembre de 2012 15:00

Introducción

42. (Diciembre 2012) Enseñanza de música por vía de las matemáticas I

Escrito por Paco Gómez Martín (Universidad Politécnica de Madrid)
Miércoles 05 de Diciembre de 2012 15:00

¿Tenéis preguntas?

Matemáticas y música

Cómo usar este libro

42. (Diciembre 2012) Enseñanza de música por vía de las matemáticas I

Escrito por Paco Gómez Martín (Universidad Politécnica de Madrid)
Miércoles 05 de Diciembre de 2012 15:00

Capítulo 1: relaciones espaciales y estructuras musicales

Puzles con relaciones espaciales

Estructuras musicales a partir de figuras geométricas

42. (Diciembre 2012) Enseñanza de música por vía de las matemáticas I

Escrito por Paco Gómez Martín (Universidad Politécnica de Madrid)
Miércoles 05 de Diciembre de 2012 15:00

Una definición de intervalos

Resumen y ampliaciones

Capítulo 2: patrones de intervalos y estructuras musicales

42. (Diciembre 2012) Enseñanza de música por vía de las matemáticas I

Escrito por Paco Gómez Martín (Universidad Politécnica de Madrid)
Miércoles 05 de Diciembre de 2012 15:00

Patrones de intervalos diatónicos

Patrones de intervalos y el círculo de quintas

Estructuras de otras colecciones

Resumen y ampliaciones

Capítulo 3: triadas y acordes de séptima y sus estructuras

De la colección al acorde

Triadas y acordes de séptima de máxima regularidad

42. (Diciembre 2012) Enseñanza de música por vía de las matemáticas I

Escrito por Paco Gómez Martín (Universidad Politécnica de Madrid)
Miércoles 05 de Diciembre de 2012 15:00

Variedad y multiplicidad de acordes diatónicos

Resumen y ampliaciones

Conclusión

42. (Diciembre 2012) Enseñanza de música por vía de las matemáticas I

Escrito por Paco Gómez Martín (Universidad Politécnica de Madrid)
Miércoles 05 de Diciembre de 2012 15:00

¿Tenemos ahora alguna respuesta?

2. La introducción del libro

42. (Diciembre 2012) Enseñanza de música por vía de las matemáticas I

Escrito por Paco Gómez Martín (Universidad Politécnica de Madrid)
Miércoles 05 de Diciembre de 2012 15:00

La introducción del libro describe una anécdota que no me resisto a citar literalmente (mi

traducción):

42. (Diciembre 2012) Enseñanza de música por vía de las matemáticas I

Escrito por Paco Gómez Martín (Universidad Politécnica de Madrid)
Miércoles 05 de Diciembre de 2012 15:00

"¿Tenéis preguntas?" preguntó un famoso compositor y director de orquesta a un público

formado por estudiantes y profesores de música en una conferencia no hace muchos años.

"Sí," -respondió un pianista conocido y de mucho talento- "¿por qué están las teclas blancas y

negras del piano dispuestas de esa manera?"

El público se paró a pensarlo durante un par de segundos antes de que una risa sorda y

nerviosa empezase a romper el tenso silencio. Tanto el compositor como el pianista parecían

incapaces de llegar a una respuesta satisfactoria, pero sus caras mostraban que estaban

42. (Diciembre 2012) Enseñanza de música por vía de las matemáticas I

Escrito por Paco Gómez Martín (Universidad Politécnica de Madrid)
Miércoles 05 de Diciembre de 2012 15:00

intrigados e interesados en esa pregunta.

El libro presenta material que dará respuesta a esta intrigante pregunta a través de

razonamientos musicales y matemáticos. En particular, explicará la distribución de la escala

diatónica en base al principio de máxima regularidad (o simplemente principio de regularidad).

42. (Diciembre 2012) Enseñanza de música por vía de las matemáticas I

Escrito por Paco Gómez Martín (Universidad Politécnica de Madrid)
Miércoles 05 de Diciembre de 2012 15:00

3. Relaciones espaciales y estructuras musicales

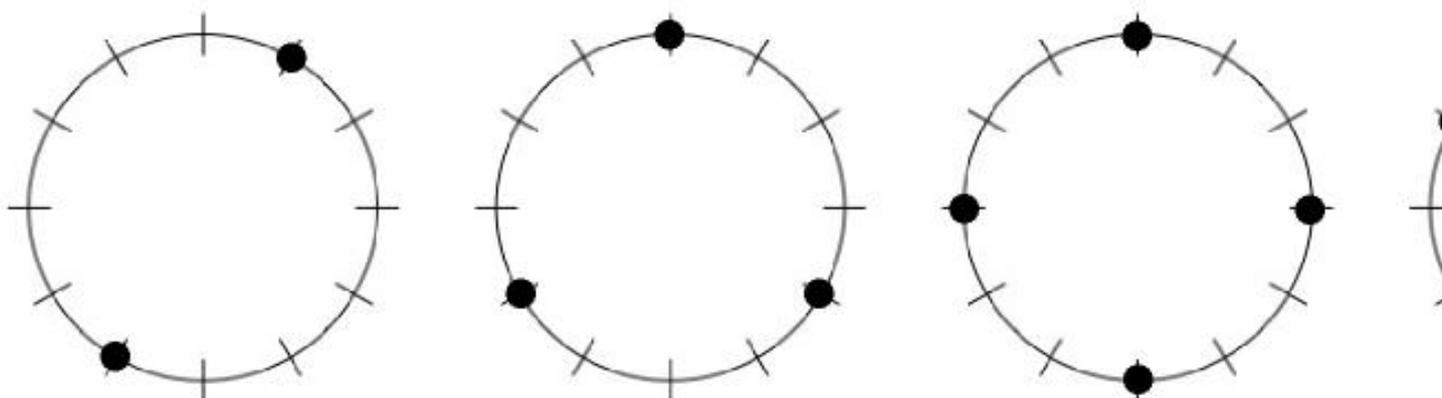
Johnson empieza directamente por mostrar unos diagramas consistente en un círculo dividido

42. (Diciembre 2012) Enseñanza de música por vía de las matemáticas I

Escrito por Paco Gómez Martín (Universidad Politécnica de Madrid)
Miércoles 05 de Diciembre de 2012 15:00

en 12 partes; véase la figura 1 (todas las figuras de este artículo están tomadas de su libro y

modificadas apropiadamente):



42. (Diciembre 2012) Enseñanza de música por vía de las matemáticas I

Escrito por Paco Gómez Martín (Universidad Politécnica de Madrid)
Miércoles 05 de Diciembre de 2012 15:00

Figura 1: Colocación de puntos en círculos.

La pregunta es sencilla: ¿cómo poner 2 puntos de manera que estén lo más alejado posible

42. (Diciembre 2012) Enseñanza de música por vía de las matemáticas I

Escrito por Paco Gómez Martín (Universidad Politécnica de Madrid)
Miércoles 05 de Diciembre de 2012 15:00

entre sí? En el círculo de más a la izquierda se ve una de las posibles soluciones. ¿Cómo se

haría para 3, 4 y 5 puntos? Poner 3 o 4 puntos es fácil e intuitivo, quizás porque esos

números son divisores enteros de 12, el número de puntos (véanse los círculos centrales de la

figura 1). El caso de 5 es harina de otro costal, pues los puntos no se pueden poner

equidistantes unos de otros.

42. (Diciembre 2012) Enseñanza de música por vía de las matemáticas I

Escrito por Paco Gómez Martín (Universidad Politécnica de Madrid)
Miércoles 05 de Diciembre de 2012 15:00

En todos los casos hay más de una solución. Por ejemplo, en el caso de 2 puntos hay 6

posibles soluciones, todas ellas equivalentes bajo rotaciones. Johnson ofrece al lector la

fórmula general que reza

$$\frac{c}{\text{mcd}(c, d)}$$

42. (Diciembre 2012) Enseñanza de música por vía de las matemáticas I

Escrito por Paco Gómez Martín (Universidad Politécnica de Madrid)
Miércoles 05 de Diciembre de 2012 15:00

donde c es el número de subdivisiones del círculo, d el número de puntos que queremos

colocar y mcd es el máximo común divisor de dos números (el mayor divisor común). En

nuestro ejemplo, tenemos

$c=12$ y $d=2$;

por tanto, el número de soluciones posibles para 2 puntos es

12/

42. (Diciembre 2012) Enseñanza de música por vía de las matemáticas I

Escrito por Paco Gómez Martín (Universidad Politécnica de Madrid)
Miércoles 05 de Diciembre de 2012 15:00

mcd(

$$12, 2) = 12/2 = 6$$

, tal y como habíamos señalado antes. Para 5 puntos hay 12 soluciones puesto que 12 y 5 solo

tienen a 1 como divisor común.

42. (Diciembre 2012) Enseñanza de música por vía de las matemáticas I

Escrito por Paco Gómez Martín (Universidad Politécnica de Madrid)
Miércoles 05 de Diciembre de 2012 15:00

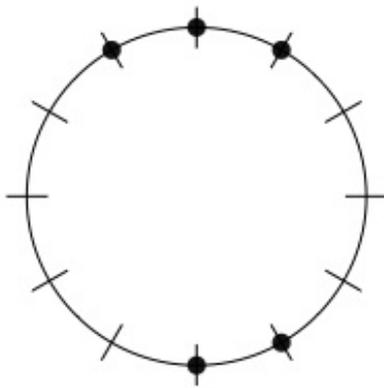
El caso de 5 puntos es llamativo. En el libro se da una solución elegante, que es de hecho la

base de un algoritmo (procedimiento) ya conocido (véase [\[DGM+09\]](#)) y que podíamos llamar

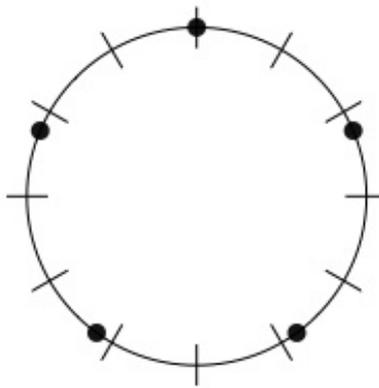
el algoritmo del vecino más cercano; véase la figura 2.

42. (Diciembre 2012) Enseñanza de música por vía de las matemáticas I

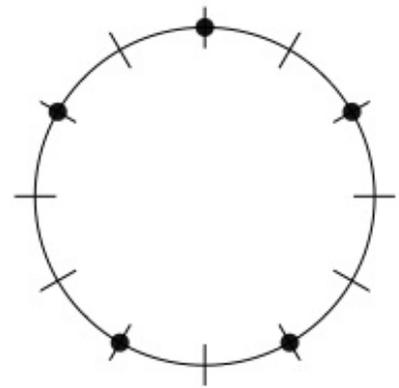
Escrito por Paco Gómez Martín (Universidad Politécnica de Madrid)
Miércoles 05 de Diciembre de 2012 15:00



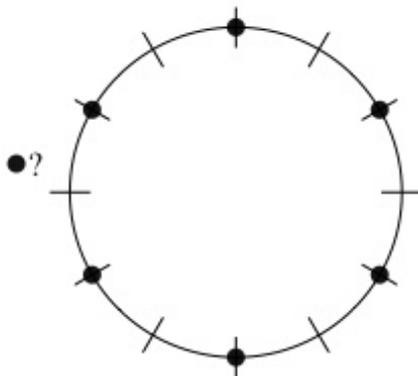
a.



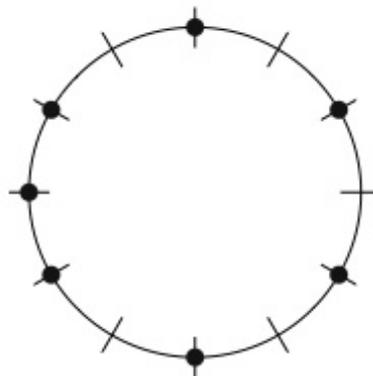
b.



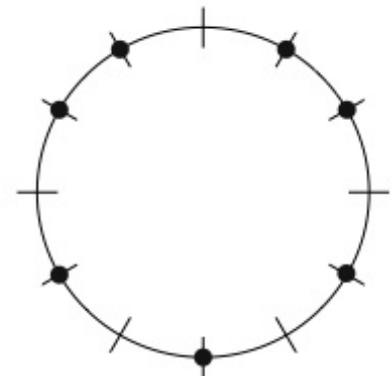
c.



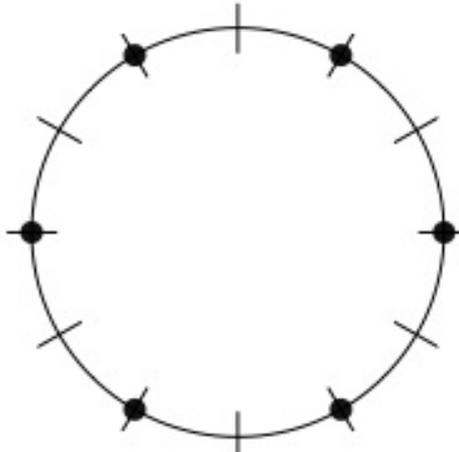
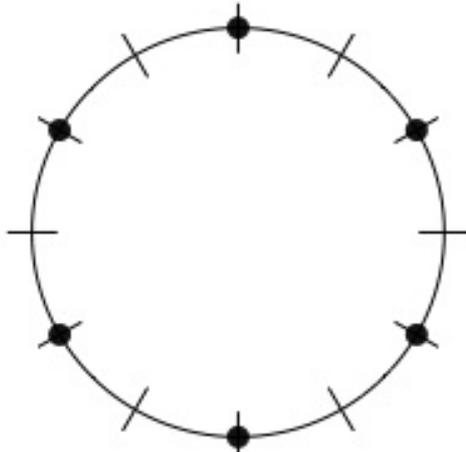
a.



b.

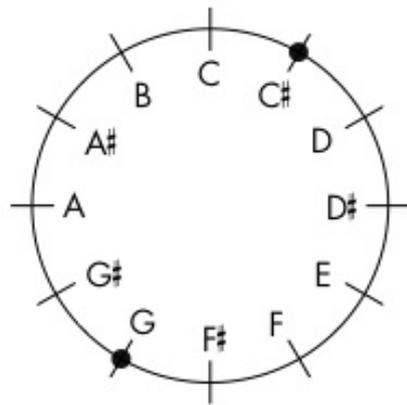


c.

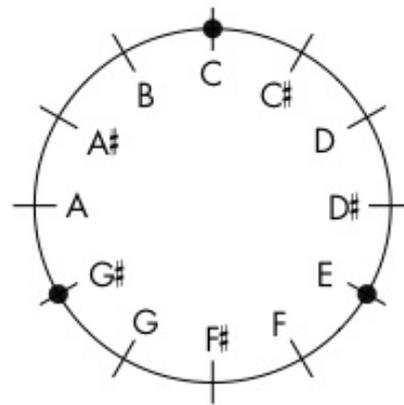


42. (Diciembre 2012) Enseñanza de música por vía de las matemáticas I

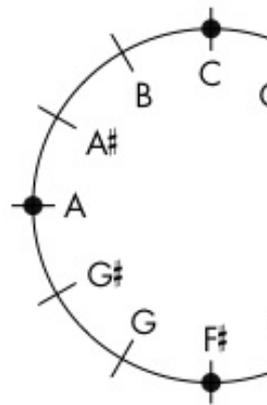
Escrito por Paco Gómez Martín (Universidad Politécnica de Madrid)
Miércoles 05 de Diciembre de 2012 15:00



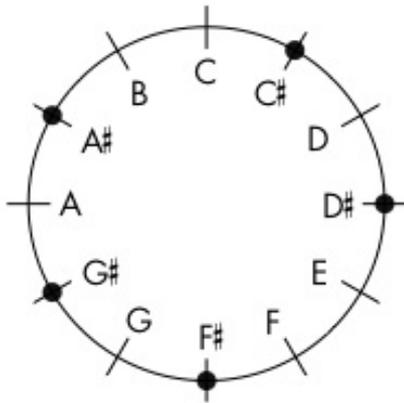
a. 2



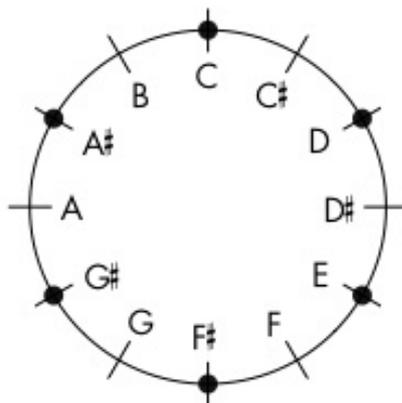
b. 3



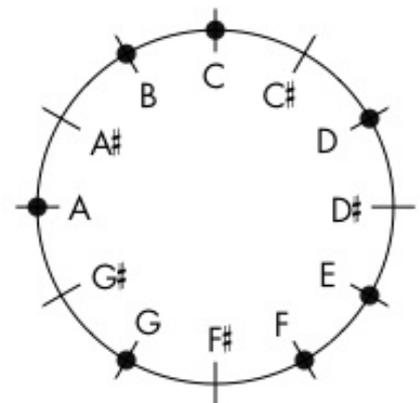
c. 4



d. 5



e. 6



f. 7

Figura 5. Diagramas con los que se ilustra el algoritmo de construcción de los diagramas de los cromatismos, como sigue: en el primer diagrama se sitúan los 12 cromatismos en un círculo, y se van colocando los puntos negros en los cromatismos que se van seleccionando, uno a uno, en el orden que se indica en los diagramas siguientes.