

14. (Mayo 2010) El teorema del hexacordo I

Escrito por Francisco Gómez Martín (Universidad Politécnica de Madrid)
Miércoles 05 de Mayo de 2010 13:45

1. Introducción

Dejadme que os hable del teorema del hexacordo, que no es incordio. Hexacordo significa seis notas, una tras otra. Lo inventó Guido d'Arezzo, para solfear, con salero y aderezo. Mucho más tarde, cuando el tonalismo arde, Schoenberg estudia los hexacordos. Como sabéis, Schoenberg es furioso practicante del dodecafonismo, sistema que basa la composición musical en la elección de una seria serie de 12 notas distintas, alrededor de la cual gira toda la elaboración formal del material musical. Por ejemplo, la seria, digo serie, de abajo aparece al comienzo de su ópera *La escalera de Jacob*, tocada en ostinato por los violonchelos.



Figura 1: Serie dodecáfónica perteneciente a *La escalera de Jacob*.

Schoenberg dividía la serie en dos hexacordos y se afanaba por encontrar en ellos alguna brillante propiedad, con talante y gravedad. Una que le llamaba la atención, le regañaba, era el contenido interválico. Schoenberg contaba, algunas veces incluso cantaba, todos los intervalos entre las notas de un hexacordo. Estaba calculando su contenido interválico. Se asombraba al comprobar que los contenidos interválicos de los dos hexacordos de una serie coincidían. Estaba, en esencia, en presencia del teorema del hexacordo. Lo usó de manera intuitiva, sin duda frutiva y quizás algo plausible (Babbit [[Bab87](#)] *dixit*).

Schoenberg se planteaba un erotema (no teman; de eros, nada): "¿Habría teorema del hexacordo? Acorde a mí, sí (de mi a si, sin acento: una quinta)" -se decía el compositor. Pero no sabía cómo establecerlo.

Veamos qué es el teorema del hexacordo con ayuda de la geometría. Una nota de una serie dodecáfónica puede representar una nota de cualquier octava; en la figura [1](#) las notas de la serie se escribieron en el ámbito de una octava. Las notas de la serie son en realidad clases

14. (Mayo 2010) El teorema del hexacordio I

Escrito por Francisco Gómez Martín (Universidad Politécnica de Madrid)
Miércoles 05 de Mayo de 2010 13:45

de alturas. Las

1

2

notas representaremos como puntos en un círculo; las sentaremos equiespaciadas, donde la distancia entre dos puntos es un semitono. La figura

[2](#)

muestra el hexacordio de más arriba.

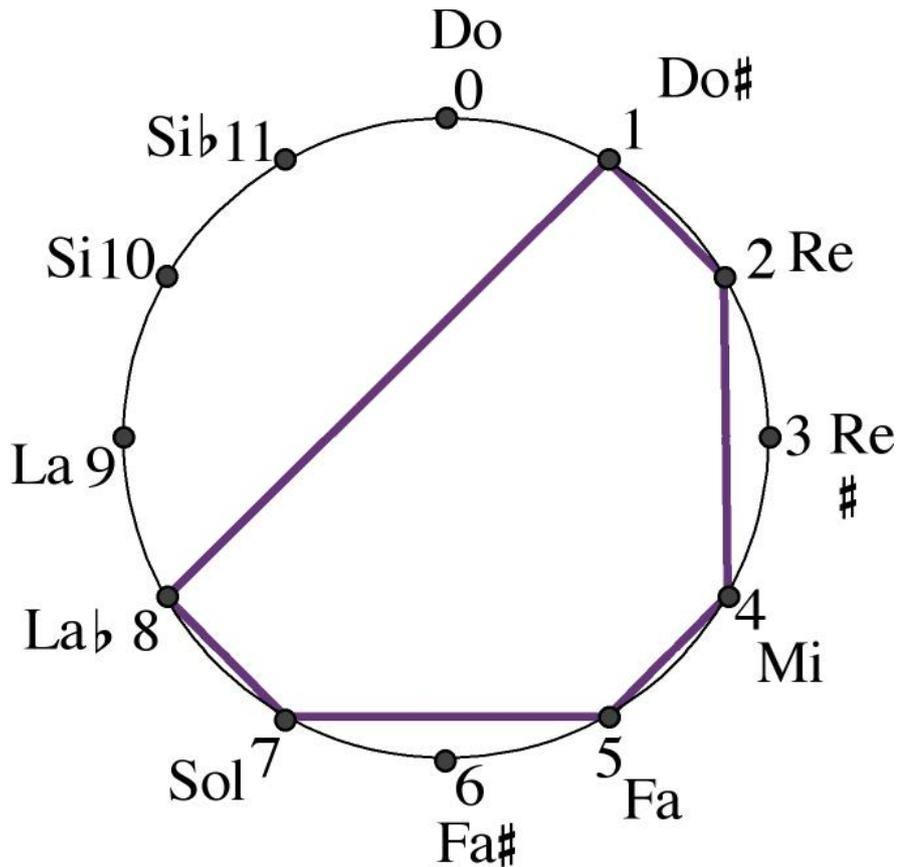


Figura 2: Representación geométrica de un conjunto de notas.

El contenido interválico, como decimos, lo forman todos los intervalos entre los puntos del hexacordio. El intervalo entre dos notas está dado por el camino más corto en el círculo (distancia geodésica). En la figura vemos la filatura de segmentos urdidos de nota a nota. Denota, anota (perdón por el tuteo): el primer hexacordio, a la izquierda; el segundo, en el centro; a la derecha, el histograma común.

14. (Mayo 2010) El teorema del hexacordo I

Escrito por Francisco Gómez Martín (Universidad Politécnica de Madrid)
 Miércoles 05 de Mayo de 2010 13:45

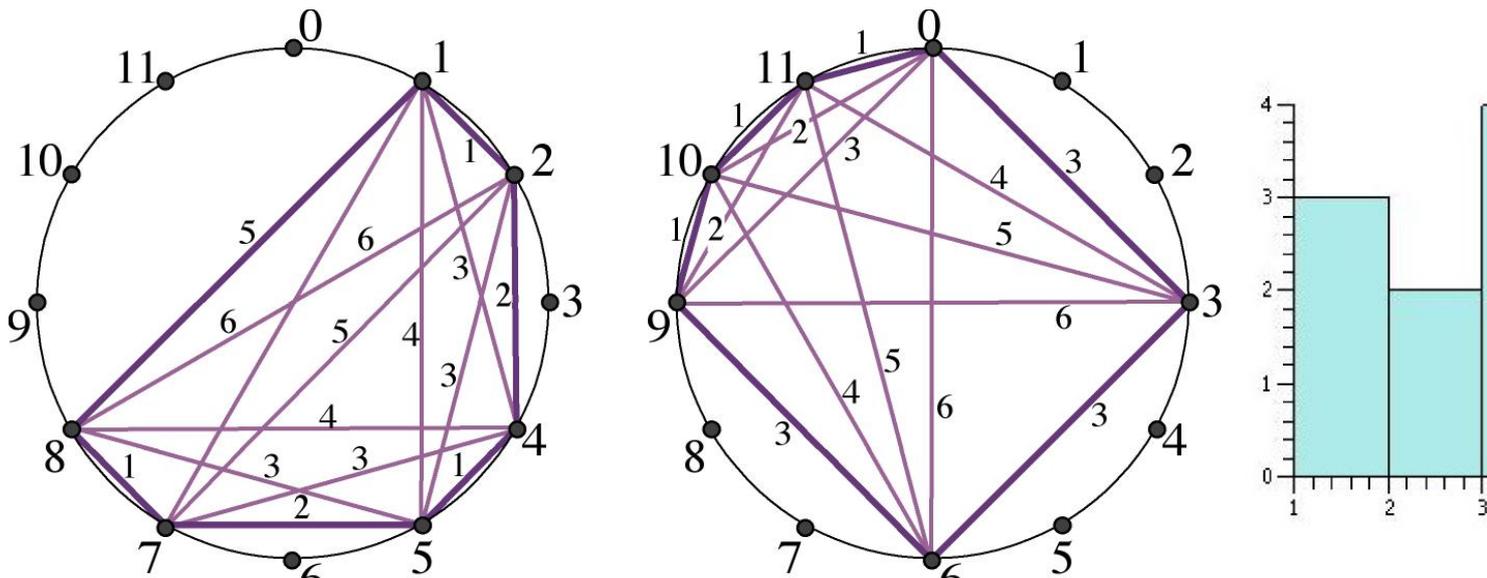


Figura 2. Dos hexacordos completamente armónicos contenidos en un séxtuplo diatónico.

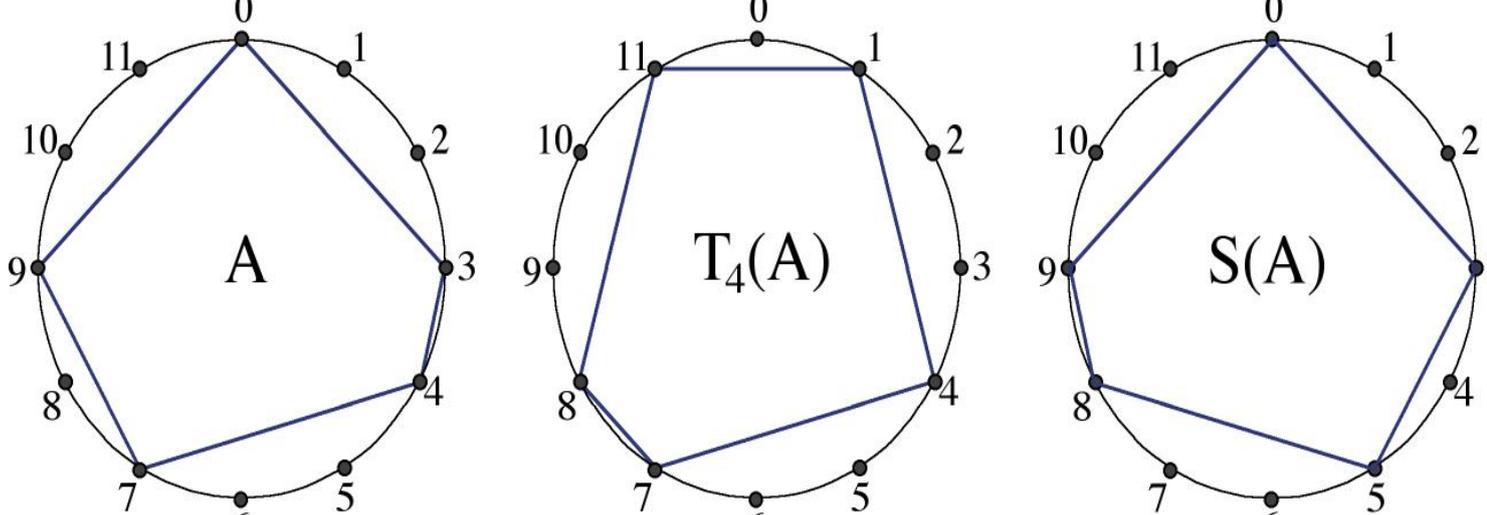


Figura 3. Tres pentacordos completamente armónicos contenidos en un séxtuplo diatónico.

14. (Mayo 2010) El teorema del hexacordo I

Escrito por Francisco Gómez Martín (Universidad Politécnica de Madrid)
 Miércoles 05 de Mayo de 2010 13:45

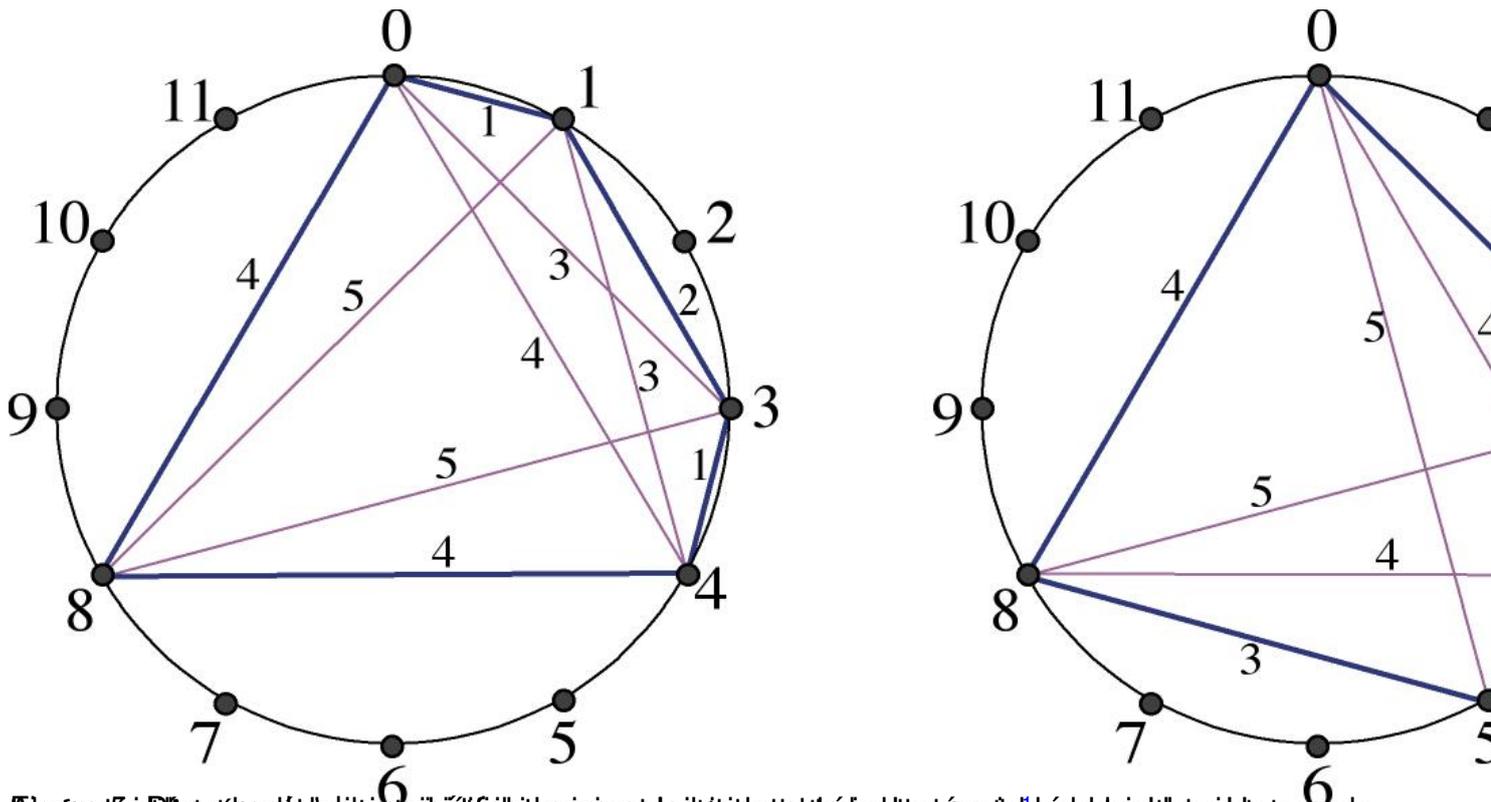


Figura 6. Transposición de un acorde corresponden con un cambio de fundamental en el

[0, 4, 7] [4, 7, 12] [7, 12, 14]

Figura 6. Transposición de un acorde corresponden con un cambio de fundamental en el

[0, 4, 9] [2, 6, 11] [7, 11, 16]

Figura 7. Cambio de acorde en la que [esta](#) de un transposición de acorde. Permiten, por

14. (Mayo 2010) El teorema del hexacordio I

Escrito por Francisco Gómez Martín (Universidad Politécnica de Madrid)
 Miércoles 05 de Mayo de 2010 13:45

Do M Fa m Do m

[0, 4, 9] [0, -4, -7] [0, 3, 7]

S T₇

Do⁷ V₉ de Mi^b V₉ de Re^b

[0, 4, 7, 9] [0, -4, -7, -9] [0, 3, 6, 10]

S T₉

Figura 86. Cambio del modo de un acorde a otro de la misma familia a un acorde séptima de sensible:

Figura 87. Cambio del modo de un acorde a otro de la misma familia a un acorde séptima de sensible:

$$\begin{cases} n = a_{nn} + \frac{1}{2}a_{nb} \\ b = a_{bb} + \frac{1}{2}a_{nb} \end{cases} \quad (1)$$

Figura 88. Caso 2 de la demostración de la tesis: aumento en 2 y el de distancias negro-blanco



Figura 89. Caso 2 de la demostración de la tesis: aumento en 1 y el de distancias negras

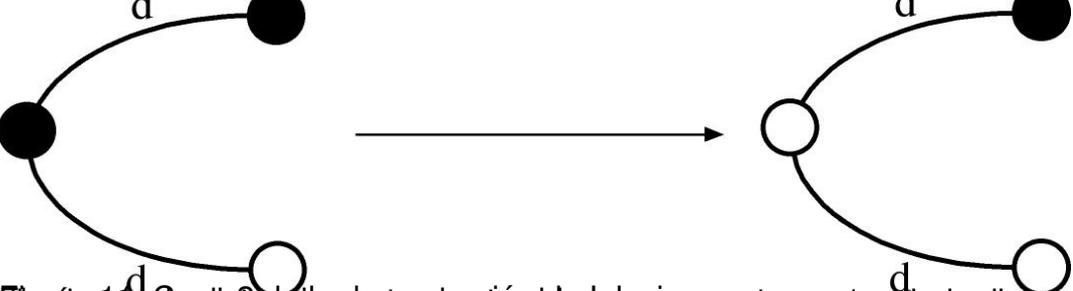


Figura 90. Caso 2 de la demostración de la tesis: aumento en 1 y el de distancias negras

14. (Mayo 2010) El teorema del hexacordo I

Escrito por Francisco Gómez Martín (Universidad Politécnica de Madrid)
 Miércoles 05 de Mayo de 2010 13:45

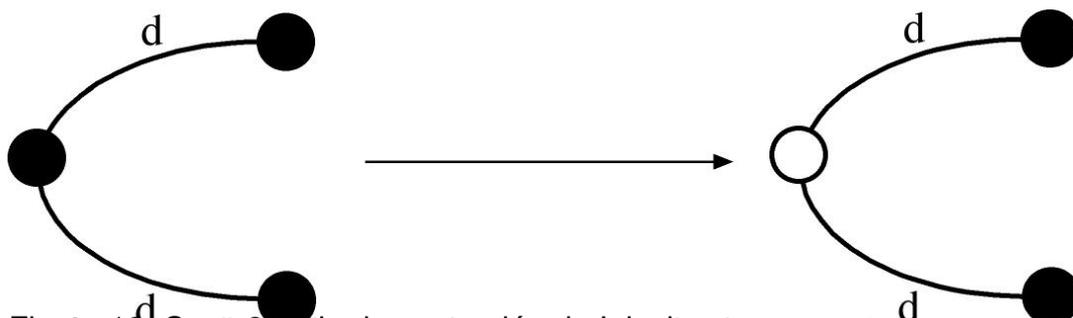


Figura 14.1. Diagrama de la demostración de la disminución en 2 v. el de distancias negro-blanco

$$\begin{cases} a_{nn} + \frac{1}{2}(a_{nb} - 2) = n - 1 \\ a_{bb} + 2 + \frac{1}{2}(a_{nb} - 2) = b + 1 \end{cases}$$

2. Para el caso (2):

$$\begin{cases} a_{nn} - 1 + \frac{1}{2}a_{nb} = n - 1 \\ a_{bb} + 1 + \frac{1}{2}a_{nb} = b + 1 \end{cases}$$

3. Para el caso (3):

$$\begin{cases} a_{nn} - 2 + \frac{1}{2}(a_{nb} + 2) = n - 1 \\ a_{bb} + \frac{1}{2}(a_{nb} + 2) = b + 1 \end{cases}$$

En consecuencia, para el caso (1) se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} n &= a_{nn} + \frac{1}{2}a_{nb} \\ b &= a_{bb} + \frac{1}{2}a_{nb} \end{aligned} \right\} \implies 0 = n - b = a_{nn} - a_{bb}$$

En consecuencia, si el número de distancias negro-blanco es el mismo que el de distancias blanco-blanco, entonces se cumple que:

