Parece razonable hablar de flexibilidad cuando nos referimos a la papiroflexia. En la práctica, toda la actividad papirofléctica se ha venido desarrollando como acción de plegado del papel. Es obvio que para plegar hay que hacer que el papel flexe antes, pero ello no evita la sospecha de que estemos empleando mal el lenguaje: si lo esencial de la papiroflexia es que plegamos, llamémosla con el neologismo *papiroplegia* (así, con g de plegar; con j -papiroplejia- parecería un vocablo médico).

La papiroflexia pura es la que empleamos, p.e, en las cintas de Moebius [ver www.caprichos-ingenieros.com ;
QUÉ; PAPIROFLEXIA; Mathematics and Origami (.pdf en inglés);
buscar
Möbius´bands)], y es la que de manera muy elemental vamos a usar a continuación para introducirnos en el número π.

Se trata de enrollar papel sobre un cilindro pre-existente a fin de conseguir una especie de canuto de papel multicapa con forma cilíndrica consistente. Luego se estudian sus distintas secciones circulares.

Ha de buscarse un cilindro pre-existente que tenga garantía geométrica (metálico mecanizado, de plástico duro moldeado, etc). Evitar los canutos de rollo de papel higiénico o similares).

La idea es poder relacionar la longitud de un papel desarrollado, con el diámetro a que da lugar cuando el papel está enrollado en círculos. En definitiva, esa relación es la que conduce al valor de π. Es lo que vamos a hacer experimentalmente.

Es ésta la mejor manera de conseguir cilindros de papel bastante precisos. Pretenderlo con una sola capa cerrando la superficie cilíndrica con una pestaña no conduce sino a una superficie cilíndrica espontáneamente deformada por causa de la discontinuidad de la flexibilidad del papel en las proximidades de la pestaña.

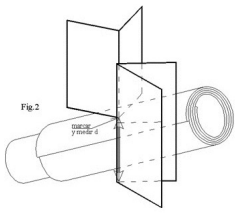
La Fig. 1 muestra lo que se acaba de decir. El papel enrollado es un DIN A4 que determina una generatriz de 210 mm y una longitud enrollada IE = 297 mm.

Lo primero que necesitamos es saber el espesor *a* del papel. Para ello se tomaron 181 hojas

con un espesor total de 20 mm. Su peso de 900 gramos aseguraba un buen recalcado del paquete. Así pues, era
a = 20/181 = 0,11 mm

El proceso a seguir fue éste:

- Ejercitar el DIN A4 enrollándolo libremente sobre sí mismo antes de acoplarlo al cilindro de partida para evitar arrugas.
- Pegar con celo el borde del papel I al cilindro de partida, en coincidencia con una generatriz de éste.
- Asegurar que todas las vueltas del papel están bien asentadas unas sobre otras para que no haya holgura entre ellas.
- Fijar con celo la última capa a lo largo de E.
- Medir con la mayor precisión posible el diámetro exterior d del canuto de papel obtenido. Sabedores de la limitación por la resolución de la regla de medir (1 mm o, como mucho, 0,5 mm), y por la *imperfección cilíndrica* que, a pesar de todo, tendremos, deben tomarse varias medidas y hallar la media. Lo mejor sería disponer de un calibre, naturalmente con nonius, pero esto no es lo habitual. La Fig. 2 muestra el recurso de medición empleado que es típico en metrología industrial. Se inmovilizará el canuto con celo sobre la mesa; también un diedro de cartulina que se situará lo más lejos posible del canuto; el otro diedro se asentará libre sobre la generatriz superior del cilindro dejando que su arista vaya a apoyarse completamente y a todo lo largo, sobre la cara del otro diedro y lo más próxima posible a su arista. Ambos diedros han de haberse recortado perfectamente a escuadra. Así obtenemos el plano horizontal que contiene a la generatriz superior del cilindro. Luego se mide la distancia entre ese plano y el de la mesa (que contiene a la generatriz inferior del cilindro). Esa distancia es precisamente el diámetro del cilindro.



- Medir el resto EE´: un pequeño trozo de papel asentado sobre él y rectificado luego, da su medida.
- Tener en cuenta que la longitud EI – EE´ se traduce en *n* circunferencias completas (4 en nuestro caso) de las que la exterior tiene por diámetro d y los diámetros de las sucesivas son d – 2a, d – 4a, etc.

Así pues, se podrá escribir:

$$EI - EE' = \pi d + \pi(d - 2a) + \pi(d - 4a) + \pi(d - 6a) \ldots + \pi[d - 2(n-1)a]$$

$$\pi \approx \frac{EI - EE'}{nd - 2[a + 2a + 3a + \ldots + (n-1)a]}$$

En el sustraendo del denominador tenemos la suma de los términos de una progresión aritmética que vale:

an(n-1) / 2

De forma que:

$$\pi \approx \frac{EI - EE'}{nd - a(n-1)n}$$

En nuestro caso concreto se ha contado con los siguientes datos:

EI = 297; EE´= 13,5; n = 4; d = 23; a = 0,11 resultando:

$$\pi \approx \frac{297 - 13,5}{4 \times 23 - 0,11(4-1)4} = 3,1264 \qquad (1)$$

Comparando el resultado hallado con el que da para π una pequeña calculadora de bolsillo (* 3,1415927) podríamos llegar a una gran frustración; sin embargo, no hay motivo de desánimo.

- Donde seguramente se da el mayor error es en la medida del diámetro d: si en vez de dar por buena una cantidad tan redonda como 23 mm hubiéramos dado 22,643, hubiésemos obtenido para π el valor *.
- Pero hay otras varias fuentes de error: La imperfección del cilindro de partida; el hecho de tomar por circunferencias segmentos de espiral; el grueso del papel que impide el cierre perfecto de las circunferencias; la limitación que entraña la cantidad de vueltas, etc.
- Así pues, sólo se pretende ofrecer el orden de magnitud de π. Obtenerlo con mucha exactitud experimentalmente es muy difícil.
- En este sentido no podemos dejar de reconocer el error que hemos cometido en la

expresión (1) que, en definitiva, puede tomar la forma

π 28350/9068 (2)

- Esta forma es la de un número racional (lo que no es π), que puede adoptar tres configuraciones: número entero (si la división es exacta, lo que no se da en el presente caso) y fracción periódica pura o mixta. Seguro que una de estas dos últimas es la representada por (2).

El hombre lleva 4.000 años persiguiendo a π. Los discípulos de Euclides ya sabían que su valor debía estar comprendido entre 3 y 4, ya que la relación de perímetro a diámetro en un hexágono inscrito es 3, y en un cuadrado circunscrito es 4. Fue Arquímedes quien lo descubrió.

- Con los ordenadores más potentes en la actualidad se ha llegado a obtener π con 100.000 cifras significativas. Es cuestión de tiempo y memoria aplicados a desarrollos en serie como el del Arcsen(x) (a su vez obtenido por inversión de la serie del seno), a pesar de su lenta convergencia. O del Arctan(x). En todo caso, el desarrollo en serie lo podemos entender como una forma de añadir cifras significativas a un número irracional mediante la adición de sumandos racionales, cosa que parece un tanto contradictoria, pero en línea con nuestro experimento.

Para terminar, y acorde con la horquilla arquimediana de $3 < \pi < 4$, observemos la circunferencia como límite inferior del perímetro de un polígono de n lados circunscrito a ella y como límite superior de otro polígono también de n lados, pero esta vez inscrito en ella, cuando n tiende a infinito.

En la Fig. 3 se ve el lado AB del polígono de n lados inscrito en la circunferencia de radio r = OA = OB y el CD del circunscrito, ambos para el ángulo en el centro 2α, siendo $\alpha = 360/2n$.
Así tendremos:
$AB = 2r \operatorname{sen}(\alpha)$; $CD = 2r \operatorname{tg}(\alpha)$
Siendo $2\pi r$ la longitud de la circunferencia, será:

$$2rn\operatorname{sen}\frac{360}{2n} < 2\pi r < 2rn\operatorname{tg}\frac{360}{2n}$$

Veamos los valores de esta desigualdad para distintos polígonos.

n = 10

3,0901699 < π < 3,2491970

n = 50

3,1395260 < π < 3,1457334

n = 100

3,1410759 < π < 3,1426266

n = 1.000

3,1415875 < π < 3,1416030

n = 10.000

3,1415926 < π < 3,1415928

n = 50.000

$3,1415927 < \pi < 3,1415927$

(para n = 50.000 se produce la saturación de la pantalla de la calculadora)

El proceso seguido es el conocido como *método de exhausción,* de Arquímedes de Siracusa. Mediante él, al avanzar el cálculo, aumenta el grado de precisión de los resultados. Arquímedes usó polígonos de hasta 96 lados, obteniendo la acotación $3 + 10/71 < \pi < 3 + 1/7$, que expresado con decimales es, $3,1408 < \pi < 3,1428$.

A la vista de todo lo anterior, ya no parece tan descorazonador el resultado obtenido para π con el experimento del canuto papirofléxico.

Para más detalles se pueden consultar los siguientes enlaces:

- http://centros5.pntic.mec.es/ies.de.bullas/dp/matema/conocer/arquimedes.htm

- http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_%CF%80

- Jesús de la Peña Hernández
www.caprichos-ingenieros.com