Apéndice I

Posición del centro del pentágono: punto C

Tomando como origen de coordenadas el vértice inferior izquierdo, las esquinas del cuadrado tienen coordenadas (x,y)=(0,0) (0,1) (1,1) y (1,0). Todos los puntos de la diagonal tienen coordenadas de la forma x=y, por ejemplo, la esquina inferior izquierda es (0,0) y la superior derecha es (1,1). El centro del pentágono está situado sobre la diagonal y por tanto tiene coordenadas x=c, y=c. El punto (c,c) que buscamos equidista de los puntos (0.5,0) y (0.75,1), por construcción del paso 3.

La distancia d entre dos puntos (x_1,y_1) (x_2,y_2) es . Así pues, si la distancia de (c,c) a (0.5,0) es igual a la distancia de (c,c) a (0.75,1), tenemos la ecuación

de donde podemos obtener c

$(c-0.5)^2 + c^2 = (c-0.75)^2 + (c-1)^2$;

$c^2 + 0.5^2 - c + c^2 = c^2 + 0.75^2 - 1.5c + c^2 + 1 - 2c$;

Las coordenadas de C en un cuadrado unidad son (x,y)=(c,c) con c =21/40=0.525. El centro del pentágono exacto se encuentra en c = cos 9 / (cos 27 + cos 9) = 0,525731112…. el error cometido es de 0.00139 (0.139%). En un papel de 20 cm de lado el punto C esta a 0,207 milímetros del centro exacto (inapreciable a la vista).

Para completar el pentágono, en el paso 4 doblamos la diagonal en 3/8 y 5/8 partes, obteniendo una distancia de . En los pasos 5-9 usamos esta distancia como aproximación al radio del pentágono r = 1 / (2 cos 9 cos 18) = 0.53228442.

Al trasladar el punto D sobre D´ en el paso 9, obtenemos un vértice del pentágono. El punto D´ , tiene coordenadas (x,1). Para encontrar x imponemos que D´ pertenezca a una circunferencia de centro (c,c) y radio r = . Los puntos de una circunferencia de radio r y centro (x_c,y_c) satisfacen la ecuación $(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2 = r^2$. Dado que el centro del círculo está en (c,c) con c = 21/40 podemos obtener x (posición de D´) tomando y = 1, $x_c = y_c = c$ y r = obteniendo la ecuación $(x-c)^2 + (1-c)^2 = r^2$ de donde sale

De las dos soluciones, la que buscamos es x = 0.289150. La solución matemáticamente exacta se puede obtener resolviendo la misma ecuación

con c = cos 9 / (cos 27 + cos 9) y r = 1 / (2 cos 9 cos 18). En un papel de 20 cm, el punto D´ se encuentra 0.35 mm a la derecha de la posición exacta (casi inapreciable a la vista, se suele tomar 0,2 mm como límite de la precisión visual).
En el paso 9 obtenemos un ángulo D´CD, que tal como indica la figura es de 45 + ,

y podemos calcular a partir de la tangente, ya que el triángulo sombreado es rectángulo y por tanto

.

Antes hemos encontrado la relación , podemos expresar el ángulo como

,

y por tanto el ángulo D´CD que buscamos se obtiene con r = y c = 21/40

En los pasos 10-11 bisecamos el ángulo D´CD dos veces

11

En el paso 12 obtenemos dos ángulos prácticamente iguales

El error, de 0.65º, es aproximadamente 1/10 del ángulo que separa los segundos de un reloj de los de antes. En un papel de 1 m^2 la distancia entre los bordes del papel en el paso 12 sería de aproximadamente 6 mm.

Para encontrar la posición del otro vértice del pentágono, vamos a los pasos 10, 11 donde bisecamos dos veces

El triángulo sombreado es rectángulo y uno de sus ángulos es y las longitudes de los catetos adyacente y opuesto son c y c-y respectivamente. A partir de la definición de tangente

podemos calcular y

(El valor teóricamente exacto es,)

Apéndice II

Definiendo la posición de los pliegues con los ángulos y **ß** como en la figura podemos expresar a en función de y **ß** y obtenemos las ecuaciones

a=(1-c)Tan(2-π/4) y a =c-Tan(2**ß**-π/2)(1-c-c/Tan(3π/4- **ß**))

Imponiendo que el borde del papel coincida con la posición del pliegue tenemos que =π-2**ß**. Suponiendo el punto c = cos 9 / (cos 27 + cos 9) se obtendrían los ángulos exactos
=π/10 y
ß
=π/5 (
=36° y
ß
=72°) . Con el valor aproximado de c=21/40, obtenemos la ecuación f(
ß
)

f(**ß**)=0.525-Tan(2**ß**-π/2)(0.475-0.525/Tan(3π/4- **ß**))-(0.475)Tan(7π/4-4**ß**).

Para que sea posible completar el paso 3 está claro que la solución f(**ß**)=0 tiene que encontrarse en valores de 0<
<π/4, o sea 3π/8<
ß
<π/2 el ángulo
ß
tiene que estar entre 67° y 90°. Dibujando f(
ß
) podemos ver que tiene una raiz muy cercana a 72°.

Resolviendo f(**ß**)=0 numéricamente se encuentra **ß**=72,07164° (1,257887 radianes). El ángulo obtenido
=π-2
ß
es de 35,85672°.

Ahora, como antes, buscamos

x = c - (1-c)tan(2-45) = 0.285960. La solución matemáticamente exacta la hemos obtenido en el Apéndice I con x = 0.287398.

Para encontrar y usamos el mismo procedimiento que en el Apéndice I

podemos calcular y

(El valor teóricamente exacto es,)