Frente a métodos, como el basado en el Teorema de Haga (ver artículos de marzo y abril), con los que se obtienen divisiones exactas del papel, existen otros que permiten aproximarnos iterativamente a determinadas divisiones. Teniendo en cuenta el grosor del papel, el error de plegado y la mayor precisión de determinados pliegues frente a otros, con los métodos de división aproximada se consiguen resultados muy satisfactorios.

Básicamente, los métodos de Fujimoto consisten en doblar mitades de longitudes o ángulos. Para la justificación de la validez de estos métodos, basta con tener una idea sobre convergencia de sucesiones.

Aunque existen otros métodos para dividir una longitud en tres partes iguales, resulta un buen primer ejemplo para ilustrar el método de Fujimoto. También veremos la división en cinco y en siete partes iguales.

Veremos el método para longitudes, aunque se aplica directamente para la división de ángulos. Para lo que sigue, suponemos que el lado que queremos dividir en partes iguales mide 1. Los pliegues que se indican tienen que ser pequeñas marcas y, en las sucesivas iteraciones, algo más largas para diferenciarlas de las anteriores.

División en tres

Paso 1: Hacemos una estimación de 1/3 en el lado izquierdo del papel: elegimos un punto C en el lado AB de modo que AC=x sea una aproximación de 1/3. Si la longitud de AB es 1, entonces el resto del lado, BC, mide 1-x.

Paso 2: Dividimos BC por la mitad y obtenemos el punto D. Tenemos aquí una primera marca y la longitud BD es . La longitud restante, AD, mide .

Paso 3: Dividimos AD por la mitad obteniendo C', de modo que la longitud de AC' es .

El conjunto de pliegues y longitudes que tenemos es

Por la definición de D, al doblar por él, B se superpone al original C. Si ahora B se superpusiera a C', significaría que C=C' y , es decir, x=1/3 y acabaría el proceso pues la estimación resultó ser óptima.

Lo más frecuente es que esto no ocurra y que al doblar por D, B no se superponga a C'. Entonces volvemos a repetir el proceso, partiendo ahora de C' en lugar de C.

Así estamos haciendo . Si las iteraciones son varias, tendríamos a partir de inicial.

Que la sucesión es convergente puede verse por la forma explícita de su término general. Haciendo un par de iteraciones y operando, se llega a

que converge a 1/3.

Una forma alternativa consiste en demostrar que la sucesión es acotada y monótona. La monotonía se puede demostrar por inducción, aunque no se sabe si es creciente o decreciente. En este caso, tenemos

.

Para la otra longitud tenemos .

División en cinco

Tenemos ahora que dividir la longitud AB, que mide 1, en cinco partes iguales. En el caso anterior, tres partes, plegábamos por la mitad determinados segmentos de la longitud inicial hacia cada uno de los extremos alternativamente. Ahora, en lugar de la mitad, obtendremos la cuarta parte hacia los extremos.

Paso 1: Elegimos un punto C de modo que la longitud AC sea x, una primera aproximación de

1/5. El resto del lado, BC, mide 1-x.

Paso 2: Obtenemos el punto D que marca la cuarta parte del extremo derecho de BC. Para ello doblamos por la mitad BC obteniendo E, y BE por la mitad. Tenemos en el extremo derecho la longitud BD que mide , siendo el resto, AD, .

Paso 3: Ahora obtenemos la cuarta parte del extremo izquierdo de AD, llevando primero A hacia D y A hacia el punto medio así obtenido. Así conseguimos el punto C' y AC' mide
.

Hemos conseguido estos pliegues

El punto E era la mitad de BC, por lo que si doblamos por él, B se superpone al original C. Si ahora B coincide con C', entonces es que C=C' y , de donde x=1/5.

En caso de que B no se superpusiera a C', repetimos el proceso partiendo ahora de C' y la longitud . Si las iteraciones son varias, tendríamos a partir de inicial.

Igual que en la división en tres partes, se puede ver que la sucesión es convergente por la forma explícita de su término general, que en este caso es

y converge a 1/5.

También se puede demostrar que la sucesión es acotada y monótona y, en este caso, tenemos

.

Es fácil ver que todas las demás secciones convergen también hacia 1/5.

División en siete

En la división en siete partes se presentan dos grandes diferencias con respecto a los casos anteriores. Por una parte, comenzamos con una estimación inicial de 3/7 y no de la fracción buscada 1/7. Por otra, las divisiones a ambos lados del papel son distintas: a la derecha es en cuartos y a la izquierda, en medios.

Paso 1: Elegimos C sobre AB de modo que AC=x sea una aproximación de 3/7. Si la longitud de AB es 1, entonces el resto del lado, CB, mide 1-x.

Paso 2: Obtenemos el punto D que marca la cuarta parte del extremo derecho de BC. Para ello llevamos B hacia C y B hacia el punto medio así obtenido. Tenemos en el extremo derecho la longitud , siendo la longitud restante, AD, . Observemos que esta longitud es la candidata a converger a 1/7.

Paso 3: Dividimos AD por la mitad, obteniendo C', de forma que la longitud AC' es .

Estamos en la siguiente situación:

Iteramos el proceso, haciendo ahora o, tras varias iteraciones, .

La forma explícita del término general es

que claramente converge a 3/7.

Referencias:

H. Huzita y S. Fujimoto, *Fujimoto Successive Method to Obtain Odd-Number Section of a Segment or an Angle by Folding Operations, Origami Science and Art,* Proceedings of the Second International Meeting of Origami Science and Scientific Origami, Otsu, Japan, November 29-December 2, 1994.