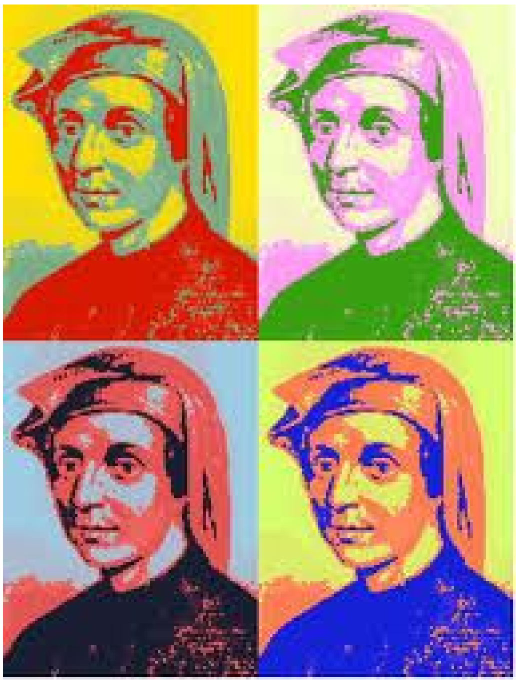
Escrito por Pedro Alegría (Universidad del País Vasco)
Martes 30 de Octubre de 2012 16:00



En la comunidad matemática es bien conocido que la sucesión de Fibonacci tiene multitud de propiedades, gran diversidad de aplicaciones y un filón inagotable de temas de divulgación matemática. ¿Qué otros conceptos matemáticos tienen el honor de copar los contenidos de una sola revista de investigación?
The Fibonacci Quarterly
es una publicación oficial de la
"Fibonacci Association"
y aparece cuatro veces al año (por aquello de que "quarterly = trimestral") desde 1963, un poco después de que la sucesión fuera dada a conocer en la cultura occidental, ya que
Leonardo de Pisa
la introdujo en su libro
"Liber abaci"
, publicado en 1202 (sólo hace 810 años), y
Édouard Lucas
le dio su nombre a finales del siglo XIX.
Por cierto, se cuenta que alguno de los fundadores de la revista
"The Fibonacci Quarterly"
sólo aparcaba su coche en las plazas numeradas con algún término de la sucesión.

Algunas de las propiedades de esta sucesión son tan sorprendentes e inesperadas que pueden plantearse como juegos de magia. En la Revista Eureka sobre Enseñanza y

Divulgación de las Ciencias puedes leer un artículo donde se proponen algunas actividades con esta sucesión, y en el número 61 y el número 62 de este rincón describimos también algunos juegos de magia que tienen como protagonista a la sucesión de Fibonacci.

En algunas ocasiones, aunque más de las que un matemático podría soportar, simples aficionados descubren propiedades y desarrollan teorías matemáticas con mucha precisión y capaces de despertar gran interés. Lo que ya es completamente extraño es que las propiedades las descubra alguien que afirma, *"I hated school, everything about it, and mathematics most of all"* (odiaba la escuela, todo lo relativo a ella y las matemáticas por encima de todo). Este es el caso del mago canadiense **Stewart James** (Courtright, 1908-1996), de quien te recomiendo encarecidamente que leas su biografía en el portal magicana.com y, si tienes oportunidad, las anécdotas que narra **Persi Diaconis** en el libro "Magical Mathematics". Una de las más significativas es ésta: cuando Diaconis le pidió una baraja para hacerle un juego, Stewart le confesó que no tenía ninguna desde hacía cinco años. Al mostrar su extrañeza, teniendo en cuenta que Stewart publicaba todos los meses algún juego de magia con cartas, éste le contestó que Agatha Christie escribía historias de asesinatos pero nunca tuvo que salir a la calle para matar a nadie.

Antes de explicar el descubrimiento de Stewart James, vamos a hacer el juego que Persi Diaconis diseñó en base a sus ideas.

-

Dibuja un cuadrado reticulado de tamaño 4x4 como el siguiente:

-

En cada una de las dos primeras casillas escribe un número entre 1 y 7 (¡sí, claro! un número natural). En la tercera casilla escribe la suma de los dos primeros, con la siguiente salvedad: si la suma es mayor que 7, anotarás el resto de la división por 7 (lo que equivale a restarle siete).

Por ejemplo, si los números iniciales son 3 y 4, anotarás su suma, que es 7; si los números iniciales son 4 y 5, la suma es 9 y anotarás el 2, pues 9 - 7 = 2.

-

Continúa rellenando el cuadro de la misma forma: en cada casilla anotarás la suma de los números de las DOS casillas anteriores, siempre respetando la regla establecida en el punto anterior. Un ejemplo:

3	4	7	4
4	1	5	6
4	3	7	3
3	6	2	1

-

Cuando hayas escrito los 16 números que forman todo el cuadrado, calcula la suma de todos ellos. A pesar de la libertad de elección (7 x 7 = 49 posibles datos iniciales), creo que el resultado final es **¡63!**

Tengo que hacer una confesión: no siempre la suma es 63: de las 49 parejas de números iniciales, si empiezas por 7 y 7, todo el cuadro estará lleno de sietes y la suma final será, por tanto, 7 x 16 = 112. En lo que sigue excluiremos, por tanto, esta situación anómala.

¿Qué propiedades hemos aplicado para que el juego funcione?

1. Las *sucesiones de Fibonacci generalizadas* (es decir, las que empiezan con cualquier par de números) cuyos elementos sólo contienen valores entre 1 y 7 (para lo cual reducimos en siete unidades los valores que excedan al 7) se repiten cíclicamente cada 16 términos.

   De hecho, sólo hay tres posibles sucesiones cíclicas:

   1, 1, 2, 3, 5, 1, 6, 7, 6, 6, 5, 4, 2, 6, 1, 7
   1, 3, 4, 7, 4, 4, 1, 5, 6, 4, 3, 7, 3, 3, 6, 2
   1, 4, 5, 2, 7, 2, 2, 4, 6, 3, 2, 5, 7, 5, 5, 3

   y en cada una de ellas aparecen de forma consecutiva 16 parejas de números entre 1 y 7 (a excepción de la pareja ya citada 7 - 7).
2. La suma de los valores de los 16 elementos en cualquiera de los ciclos es igual a 63.

Pero hay más propiedades que puedes aprovechar al hacer el juego:

- Todas las posibles secuencias contienen exactamente dos sietes separados ocho posiciones.
- Después de cada 7, hay un número que se repite dos veces.
- Salvo los sietes, dos números separados por ocho posiciones suman siete.

¿Cuál es el principio descubierto por Stewart James?

En 1959, Stewart James le comunicó por carta a **Martin Gardner** que había descubierto que las sucesiones de Fibonacci generalizadas, si en cada paso se reduce cada término a su raíz digital (es decir, la que se obtiene sumando las cifras del número), son periódicas de periodo 24 y la suma de los 24 términos es igual a 117 (a excepción de la que empieza por 9-9 que tiene periodo uno y la que empieza por 3-3 que tiene periodo 8 y la suma de los términos de cada ciclo es 45). De hecho, sólo hay tres posibles sucesiones (aparte de las anómalas), que son:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 4, 3, 7, 1, 8, 9, 8, 8, 7, 6, 4, 1, 5, 6, 2, 8, 1, 9
1, 3, 4, 7, 2, 9, 2, 2, 4, 6, 1, 7, 8, 6, 5, 2, 7, 9, 7, 7, 5, 3, 8, 2
1, 4, 5, 9, 5, 5, 1, 6, 7, 4, 2, 6, 8, 5, 4, 9, 4, 4, 8, 3, 2, 5, 7, 3

En agosto de 1962, Stewart James publicó esta propiedad con el nombre de **PRINCIPIO AAG,** nombre que se obtiene estableciendo la equivalencia entre las letras y su posición en el alfabeto. Como A = 1, A = 1, G = 7, resulta que AAG = 117, la suma constante de los ciclos citados. En su artículo proponía además una idea que podía convertir la propiedad en juego de magia. Si se forma un retículo cuadrado de tamaño 5x5 y se construye una sucesión de Fibonacci generalizada (reduciendo sus términos a su raíz digital) a partir de dos números iniciales (que no sean ambos múltiplos de tres), la suma de los 25 términos será igual a 117 más el primer término de la sucesión. Esto permitiría que el juego pudiera repetirse sin que el resultado final fuera siempre el mismo.

Con esta propiedad en mente, se puede realizar un juego similar al descrito antes, muy parecido a los que describen **Martin Gardner** en la revista *"Apocalypse"* (1978) y **Arthur McTier** en su libro *"Card Concepts"* (Davenport, 2000).

- Saca dos barajas y entrega una de ellas a un espectador. Explícale que, entre los dos, vais a formar un cuadrado de cartas de tamaño 5x5. Deja también sobre la mesa una hoja de papel indicando que has escrito allí una predicción.

- Pide al espectador que coloque cualquier carta de su baraja (que tenga valor menor de 10) cara arriba sobre la mesa mientras tú haces lo mismo con una carta de tu baraja.

- Ahora el espectador suma los valores de las dos cartas, busca entre sus cartas alguna de dicho valor, sin importar el palo, y la coloca como tercera carta. A continuación tú haces lo mismo con la suma de la segunda y la tercera cartas. Si, en algún momento del proceso, la suma de dos cartas consecutivas es mayor que nueve, se resta nueve para que la carta colocada tenga siempre valor comprendido entre 1 y 9.

-

Se continúan colocando cartas alternativamente, una el espectador y una tú, hasta colocar un total de 25 cartas, formando un cuadrado de tamaño 5x5. Una posible disposición final sería la siguiente:

-

Pide al espectador que sume los valores de las 25 cartas. Cuando lo haya hecho, muestra la predicción y pon la misma cara de sorpresa del espectador cuando compruebe que coincide con la suma.

Ahora ya no será muy difícil comprender el secreto del juego. Tu primera carta no es cualquiera, sino que depende de la predicción que hayas escrito. O al revés, tu predicción no es cualquiera sino que depende de tu primera carta. La correspondencia es la siguiente: la suma de las 25 cartas será igual a 117 más el valor de la primera carta.

Lo más práctico es tener escrita una predicción, digamos 124, pedir al espectador que saque una carta y la coloque sobre la mesa cara arriba. Si es un 7, sacas de tu baraja cualquier carta y sigues como he indicado. Si saca otra carta, buscas un siete en tu baraja y colocas las dos cartas en fila, siendo la tuya la primera. Con esto evitas además que la primera carta sea un múltiplo de tres, en cuyo caso la sucesión obtenida no sería la deseada.

Observaciones finales

1. Puedes también mostrar tus dotes de calculista ultra-rápido: después de colocadas las dos primeras cartas, buscas en tu baraja una carta del mismo valor que la primera y la colocas cara abajo en el lugar que ocuparía la vigésimoquinta. Si eres capaz, también puedes buscar la que ocupará la posición vigésimocuarta (que será la resta entre la segunda y la primera o su complemento a nueve en caso de que la segunda sea menor que la primera). Así, al llegar al final, las vuelves cara arriba para demostrar que son las que corresponden en la secuencia.

2. Debido a la propiedad adicional de que la suma de dos términos de la secuencia separados en 12 lugares es igual a 9 (salvo que sea un nueve, en cuyo caso el otro también será un nueve), puedes también colocar una carta cara abajo en una posición intermedia. Por ejemplo, la carta central del cuadrado 5x5 será el complemento a nueve de la primera carta.

3. Incluso puedes plantear el juego como un experimento de clarividencia. Contigo de espaldas, pides al espectador que forme un rectángulo de tamaño 8x3 y coloque las cartas cara abajo, según la regla ya descrita. Cuando te vuelves de cara puedes decir que la suma de los valores de todas las cartas es 117. Como además 117 = 9 x 13, tratarás de encontrar parejas de números cuya suma es 9. Cada vez que vuelves cara arriba una carta, busca la que esté separada 12 lugares y la vuelves cara arriba, comprobando que la suma de ambas es 9. Como excepción, cuando la carta vuelta sea un nueve, explica que, como no hay ningún cero, tratarás de encontrar otro nueve. Dicho nueve también está separado 12 lugares del anterior.

4. **Colm Mulcahy**, otra persona de cita obligada en este rincón, también ha estudiado este principio y ofrece algunos juegos en su columna Card Colm .

Pedro Alegría (Universidad del País Vasco)