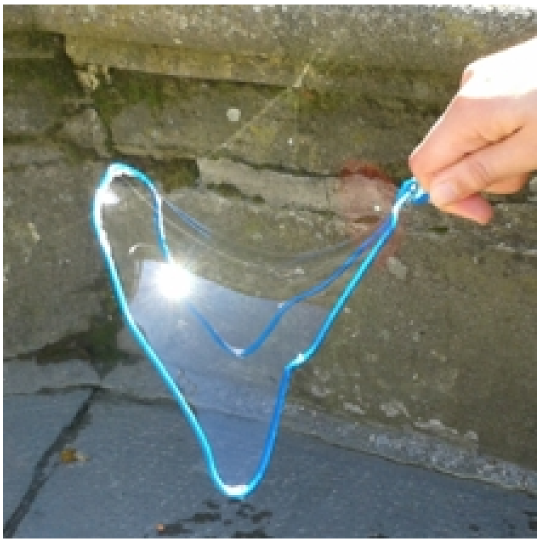
ABC, 25 de Mayo de 2020
CIENCIA - El ABCdario de las matemáticas
Víctor M. Manero

Hoy nos acercaremos a un problema clásico de geometría diferencial, que además nos permitirá experimentar en casa

Adobe Stock

Supongamos que introducimos, en una solución jabonosa, un alambre que forma una curva cerrada. Al extraerlo, posiblemente tras varios intentos, se formará una película de jabón que tiene al alambre por borde.



Existen muchas posibles superficies que tienen a este alambre por borde, sin embargo, al repetir el proceso vemos que la película de jabón que se obtiene es siempre la misma. Por lo tanto, de entre todas las posibles formas que puede adquirir la película de jabón, ésta adopta siempre una configuración concreta, que depende únicamente de la forma del alambre.

Pero, ¿qué tiene esta superficie, escogida por el jabón, que la hace preferible a las demás?

Resulta que de todas las posibles superficies que tienen por borde al alambre, la forma que adopta la película de jabón es precisamente la que tiene menor área.

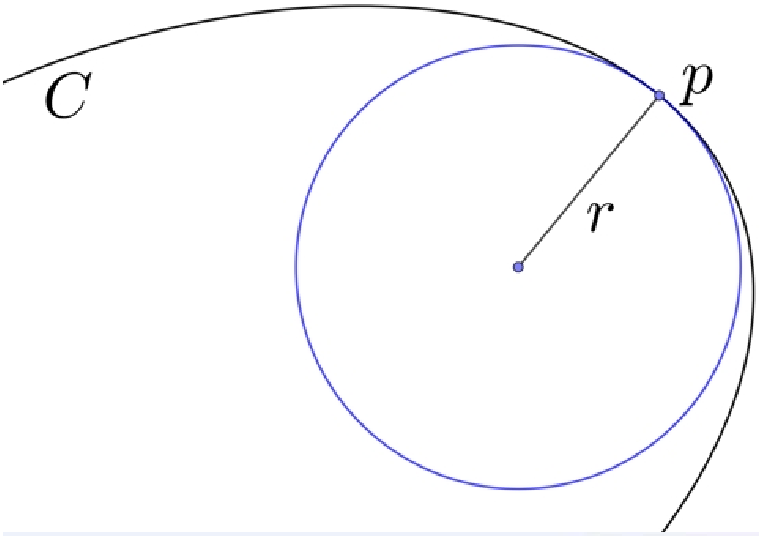
Este tipo de superficies, las que poseen menor área de entre todas las delimitadas por una cierta curva, se denominan **superficies mínimas** y hace tiempo que la comunidad matemática se percató de que pueden ser descritas utilizando la curvatura. En particular, las superficies mínimas son superficies cuya curvatura media vale exactamente cero en todos sus puntos. Pero, ¿qué es esto de la curvatura media? Para poder introducir este concepto, tenemos que hacer un pequeño viaje a través de una idea importantísima en geometría, la curvatura.

Curvatura en curvas (dimensión 1)

La curvatura es un concepto que transmite la idea de cuanto se aleja una curva o una superficie de ser, respectivamente, una recta o un plano. Podemos definir la curvatura, (la llamaremos k) de una curva plana C como una función que a cada punto p de dicha curva le asocia un número real $k(p)$, esto en matemáticas se suele denotar así:

$$\begin{aligned} k: C &\rightarrow \mathbb{R} \\ p &\rightarrow k(p) \end{aligned}$$

Dado un punto p de una curva C, podemos pensar en la circunferencia tangente en ese punto que mejor se ajuste a la curva. La curvatura en p, es decir $k(p)$, se puede interpretar como el inverso del radio de esa circunferencia.

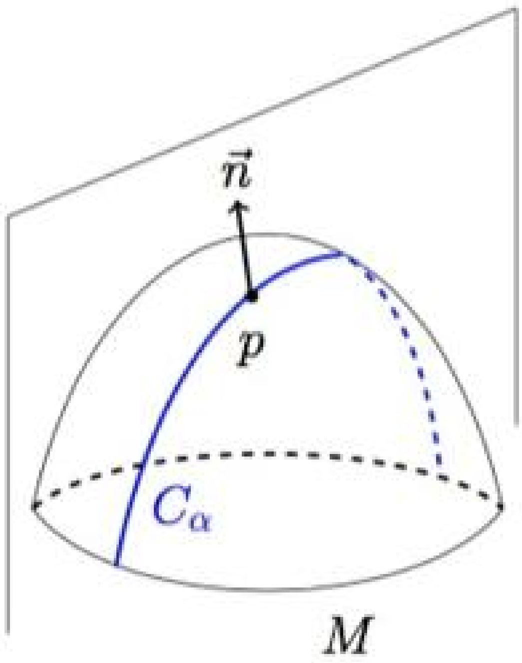


$$k(p) = 1/r$$

Curvatura en superficies (dimensión 2)

Pensemos ahora en una superficie *M* cualquiera y tomemos un punto *p* de la misma. Podemos escoger un vector normal
n
, es decir, que sea perpendicular a la superficie en ese punto. Digo escoger, porque nuestro vector normal puede apuntar hacia un lado de la superficie o hacia el otro. Este hecho hará que podamos tener curvaturas positivas y negativas.

Tomamos todos los planos que contienen al vector normal, los podemos parametrizar por medio de una dirección *alpha*, y hacemos su intersección con la superficie *M*, obteniendo así para cada dirección
alpha
una curva plana sobre
M
que llamaremos
C _ alpha
.



Por tanto, para todo punto *p* de una superficie *M* y dada una dirección *alpha* podemos definir la

$$\begin{aligned} k(\alpha)\ &: C_\alpha \to \mathbb{R} \\ &\quad p \to k(p) \end{aligned}$$

[illegible]

Curvatura de Gauss

Una de las curvaturas más conocidas es la curvatura de Gauss, y se define como el producto de las curvaturas principales,

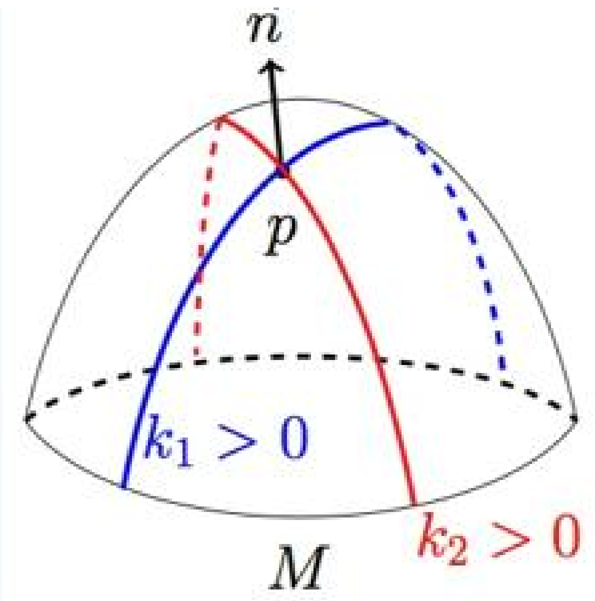
$$K = k_1 k_2,$$

por tanto si *M* es una superficie, su curvatura de Gauss para cada punto viene dada por

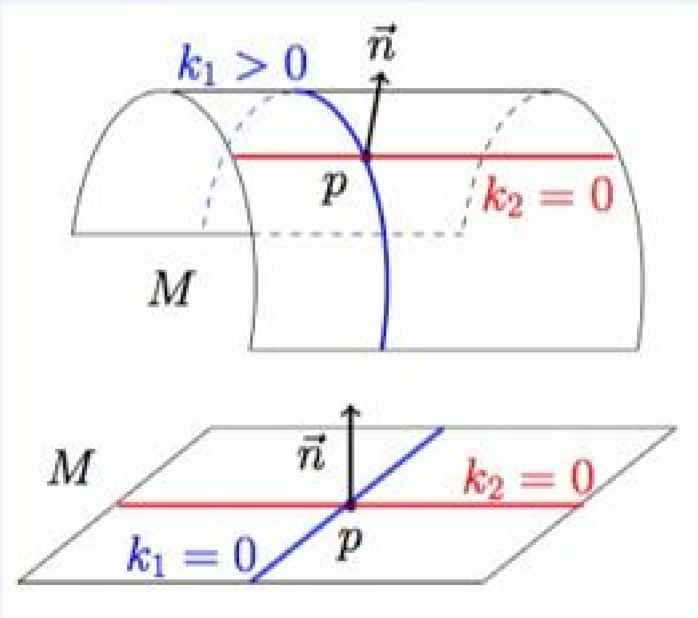
$$\begin{aligned} K : M &\to \mathbb{R} \\ p &\to K(p) = k_1 k_2. \end{aligned}$$

Esta curvatura nos permite distinguir tres tipos de puntos en una superficie:

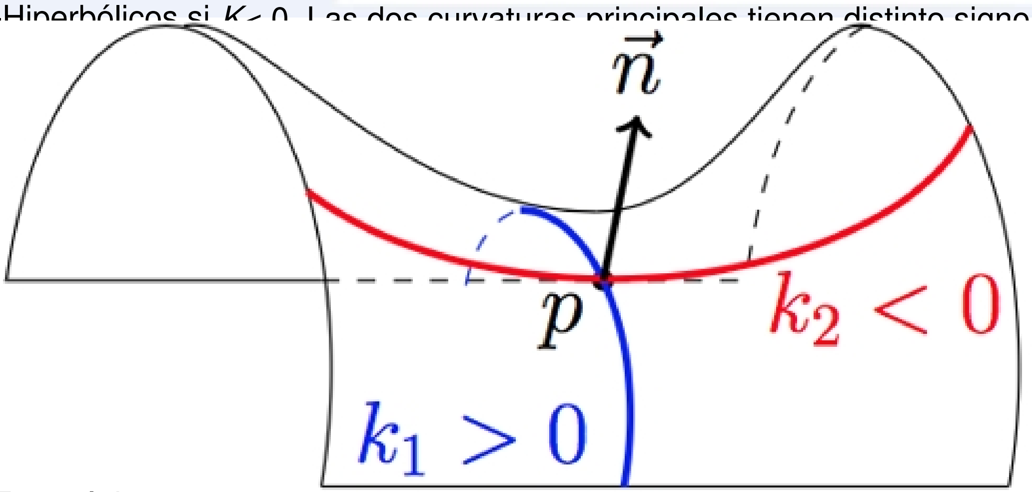
-Elípticos si K >0. Las dos curvaturas principales tienen el mismo signo.



-Parabólicos si K=0. Al menos una de las curvaturas principales es nula.



-Hiperbólicos si $K < 0$. Las dos curvaturas principales tienen distinto signo.



Estos últimos se suelen llamar **puntos silla** por su parecido con las sillas de montar de los caballos.

Curvatura media

La curvatura media de una superficie, en un punto de la misma, es el valor medio de la curvatura en todas sus direcciones. Es decir cogemos todas las curvaturas de las curvas planas *C _ alpha* que nos aparecen en las distintas direcciones y hacemos la media. Por lo tanto la curvatura media se define como

$$H = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} k(\alpha)\, d\alpha.$$

¡Una definición con integrales! Pero no pasa nada, porque gracias a un genial resultado de Euler podemos describir las curvaturas en las distintas direcciones en términos de las dos curvaturas principales tal que así,

$$k(\alpha) = k_1 \cos^2\alpha + k_2 \sin^2\alpha,$$

por lo que haciendo esa integral -cuidado que las carga el diablo- obtenemos que la curvatura media se puede definir equivalentemente como la media de las dos curvaturas principales.

$$H = \frac{1}{2}\,(k_1 + k_2).$$

Mucho mejor sin integrales, donde va a parar. Otra consecuencia del resultado de Euler es que las curvaturas principales son perpendiculares, yo lo dejo caer como que no quiere la cosa. En conclusión, dada una superficie , su curvatura media viene dada por

$$\begin{aligned} H: M &\to \mathbb{R} \\ p &\to H(p) = \frac{1}{2}\,(k_1 + k_2) \end{aligned}$$

Superficies con curvatura media nula

Habíamos aventurado, al comienzo del artículo, que las superficies minimales se pueden describir como aquellas que tienen curvatura media nula en todos sus puntos, es decir *H*=0, en todos los puntos de la superficie. Una primera consecuencia de este hecho es que en las superficies minimales se satisface que las curvatura principales son opuestas, es decir,

$$\mathbf{k_2 = -k_1}$$

por lo que la curvatura de Gauss en todos sus puntos será,

$$\mathbf{k = -k_1^2}$$

o lo que es lo mismo la curvatura de Gauss de una superficie mínima no puede ser positiva. ¡Atención, atención! porque esto último implica que en una superficie mínima todos sus puntos son puntos silla (si k_1 es no nulo) o es una superficie plana (si k_1 es nulo). Fíjate que maravilloso resultado acabamos de obtener sin más que aplicar las definiciones de curvatura media y de Gauss.

Ejemplos en la vida cotidiana

Desde un punto de vista más práctico, la superficies mínimas han sido muy utilizadas en múltiples y diversos campos de la industria. Puesto que minimizan el área, su uso puede producir importantes reducciones de gastos y por ello no es nada extraño encontrar ejemplos de estas superficies en el día a día, como por ejemplo en algunos tipos de patatas o en las torres de refrigeración de las centrales nucleares.

Para obtener nuestros propios ejemplos de superficies mínimas basta coger un alambre cerrado, (o varios), al que daremos distintas formas, sumergirlo en una solución jabonosa y extraerlo con cuidado. En mi caso cogí una percha a la que no tenía mucho aprecio y un cubo de agua con bastante jabón. Fui dando distintas formas a la percha, lo cual me originó diferentes superficies mínimas. Te animo a hacer la prueba en casa, lo pondrás todo perdido, sí, pero conseguirás superficies muy chulas y podrás comprobar que, en efecto, todos sus puntos son puntos silla a no ser que se trate de una superficie plana .

Víctor M. Manero es profesor de la Universidad de Zaragoza y miembro de la comisión de divulgación de la Real Sociedad Matemática Española.

El ABCDARIO DE LAS MATEMÁTICAS es una sección que surge de la colaboración con la Comisión de Divulgación de la Real Sociedad Matemática Española (RSME)