ABC, 18 de Mayo de 2020
CIENCIA - El ABCdario de las matemáticas
Pedro Alegría

La pregunta «¿se podría recortar en piezas un polígono de modo que, al volverlas a colocar de otra forma, se consiga un cuadrado?» tiene detrás siglos de debate matemático

Melrigoni - Wikicommons

Desde nuestra más tierna infancia, nos han enseñado que la civilización clásica griega tenía ciertas manías a la hora de realizar construcciones geométricas, incluyendo las más complicadas. Por ejemplo:

- querían por todos los medios dividir en tres partes iguales un ángulo, cualquier ángulo;

- estaban empeñados en trazar un cuadrado cuya área fuera igual a la de un círculo, de cualquier círculo;

- se obcecaron en fabricar una superficie cúbica cuyo volumen fuera el doble del volumen de otro cubo.

Después entendimos que la restricción del uso de regla y compás podía tener motivos estéticos y místicos, tan del gusto de la época (la regla y el compás son los instrumentos ideales con los que trazar rectas y circunferencias perfectas) y, después de muchos siglos de trabajo duro, ahora sabemos que, entre otros, estos tres problemas no tienen solución, gracias a las demostraciones de Pierre Wantzel (1837) sobre la duplicación del cubo y la trisección del ángulo así como a la de Ferdinand von Lindemann (1882) sobre la cuadratura del círculo.

Los tres problemas clásicos: trisección del ángulo, cuadratura del círculo y duplicación del cubo

A pesar de ello, es de agradecer el empeño que siguen poniendo personas que se resisten a confiar en las demostraciones matemáticas y proporcionan construcciones de gran originalidad con las que pretenden resolver alguno de los problemas citados. Aunque es evidente que ninguna puede ser correcta (lo bueno que tienen las matemáticas es que las pruebas de sus resultados son inmunes al paso del tiempo), algunos de esos métodos pueden llevar a las matemáticas por caminos inexplorados y, quién sabe, productivos. Al menos, la recolección de falsas construcciones y supuestas pruebas pseudomatemáticas contenidas en el libro “The trisectors” (Mathematical Association of America, 1996) han dado a su autor, Underwood Dudley, un gran reconocimiento popular.

¿Qué tal si eliminamos las restricciones impuestas por nuestros antepasados? Por ejemplo, si utilizamos simplemente unas tijeras:

¿se podría recortar en piezas un círculo de modo que, al volverlas a colocar de otra forma, se consiga un cuadrado?

Si fuera posible, ¿habríamos garantizado que ambas figuras iban a tener la misma área?

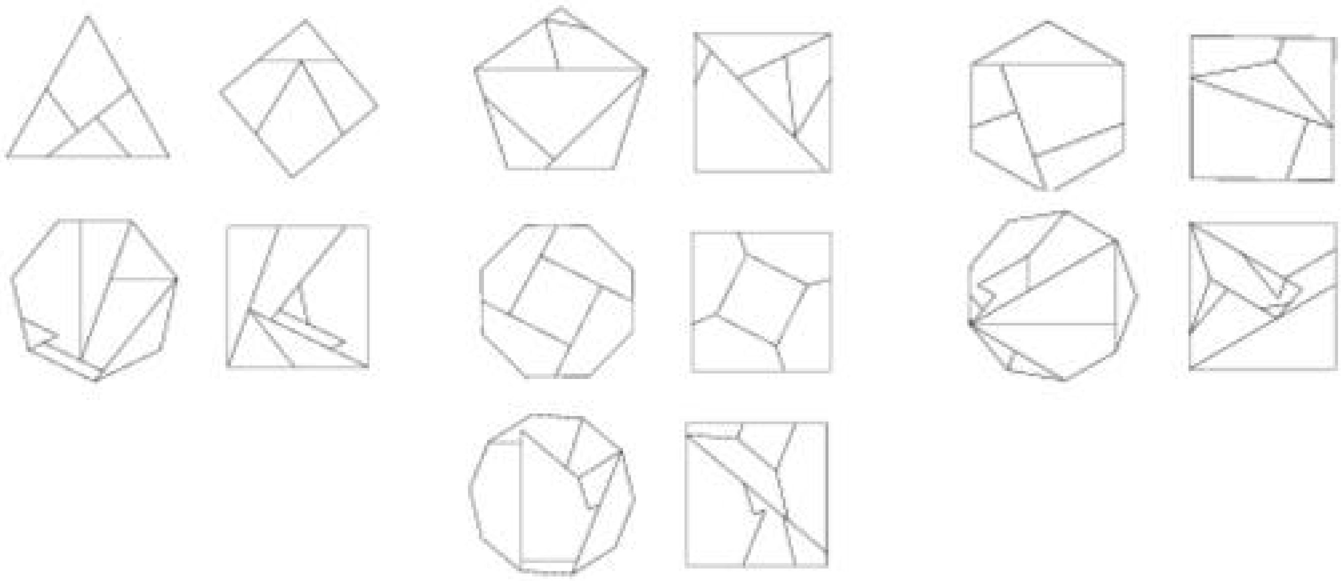
El hecho de que una de las figuras tenga bordes rectos y la otra bordes curvos parece hacer sospechar que no es posible. Antes de confirmar o desechar esta conjetura, vamos a plantear una versión simplificada:

¿se podría recortar en piezas un polígono de modo que, al volverlas a colocar de otra forma, se consiga un cuadrado?

Pues bien, se conoce desde hace bastante tiempo que la respuesta es positiva. Entre 1807 y 1835, William Wallace, Farkas Bolyai y Paul Gerwien, lo demostraron por separado y de forma independiente. Es muy fácil entender la demostración gráfica pues se basa en dividir un polígono en diversos triángulos, recortar cada triángulo en tres piezas para formar un rectángulo y recortar por último los rectángulos de modo que se puedan recomponerse para formar un cuadrado. Hay muchas versiones animadas de este proceso como la que se muestra en este video.

Lo que no es tan sencillo es el problema de saber cuál es el menor número de piezas necesarias para conseguir la cuadratura. Algunos casos, correspondientes a los polígonos regulares, se han ido resolviendo con el tiempo. Mostramos aquí la lista de los primeros valores conocidos hasta el momento y remitimos al libro “Dissections: Plane and Fancy” (Cambridge, 1997) de Greg Frederickson a cualquiera interesado en el tema:

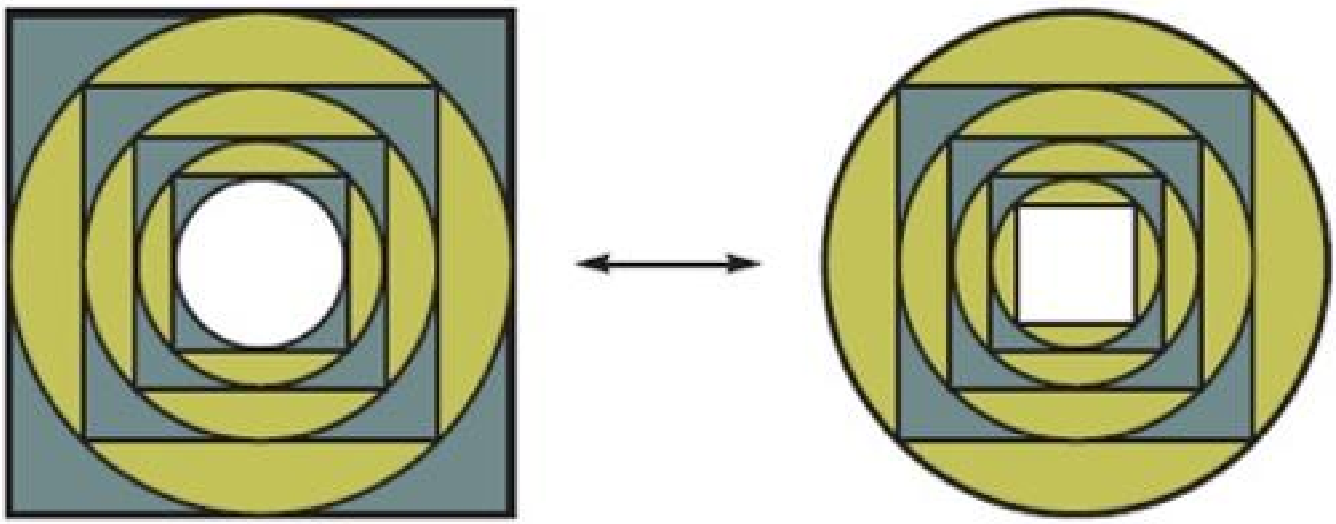
Número de lados	Número de piezas	Autor
3	4	Dudeney, 1902
5	6	Brodie, 1891
6	5	Busschop, 1873
7	7	Theobald, 1995
8	5	Bennett, 1926
9	9	Theobald, 1995
10	7	Theobald, 1995



Métodos de cuadratura por disección de los primeros polígonos regulares

Volviendo a nuestro problema, Alfred Tarski propuso en 1925 el problema de averiguar si es posible recortar un círculo en piezas con las que formar un cuadrado de la misma área. Él mismo pudo probar que ambas figuras tendrían la misma área pero no estaba seguro de que fuera posible la disección. Claro, el número de piezas debe ser finito, no vaya a ser que queramos realizar la construcción ideal que se sugiere en las siguientes figuras del siguiente vídeo:

Tampoco vale esta, que también necesita un proceso infinito para conseguirlo:



Descomposición de un cuadrado en círculo y viceversa

Por sorprendente que parezca, la respuesta al problema de Tarski es afirmativa. Tuvieron que pasar más de 60 años hasta que un teorema demostrado por Miklós Laczkovich en 1990 lo corroborara: todo círculo es cuadrable con un número finito de piezas. Lamentablemente, un par de malas noticias acompañan a la demostración: las piezas son entes matemáticos abstractos y, por tanto, no se pueden construir físicamente y hacen falta alrededor de 10^50 piezas (sí, un uno seguido de cincuenta ceros) para conseguirlo. Por suerte, la primera dificultad fue solventada por Lukasz Grabowski, András Máthé y Oleg Pikhurko quienes demostraron en 2017 que las piezas tienen medida "real" (en el argot matemático se diría que son medibles Lebesgue). A pesar de todo (como ya probaron Lester Dubins, Morris Hirsch y Jack Karush en 1963), las piezas son tan complejas que no es posible fabricarse un puzle que permita construir con ellas un cuadrado y un círculo.

La siguiente pregunta es inevitable: ¿qué ocurre en dimensión tres? Esta cuestión ya la planteó David Hilbert en París ante los asistentes al famoso Congreso Internacional de Matemáticas del año 1900:

«Dados dos poliedros con el mismo volumen, ¿es posible cortar el primero en una cantidad finita de piezas poliédricas y reensamblarlas para conseguir el segundo?»

Curiosamente, este problema fue el primero en resolverse de la lista de 23 problemas planteados por Hilbert en aquella reunión. Y, sorprendentemente, la respuesta es ahora negativa. Pero esto… es otra historia.

Pedro Alegría es profesor de la Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea y miembro de la comisión de divulgación de la RSME.

El ABCDARIO DE LAS MATEMÁTICAS es una sección que surge de la colaboración con la Comisión de Divulgación de la [Real Sociedad Matemática Española (RSME)]