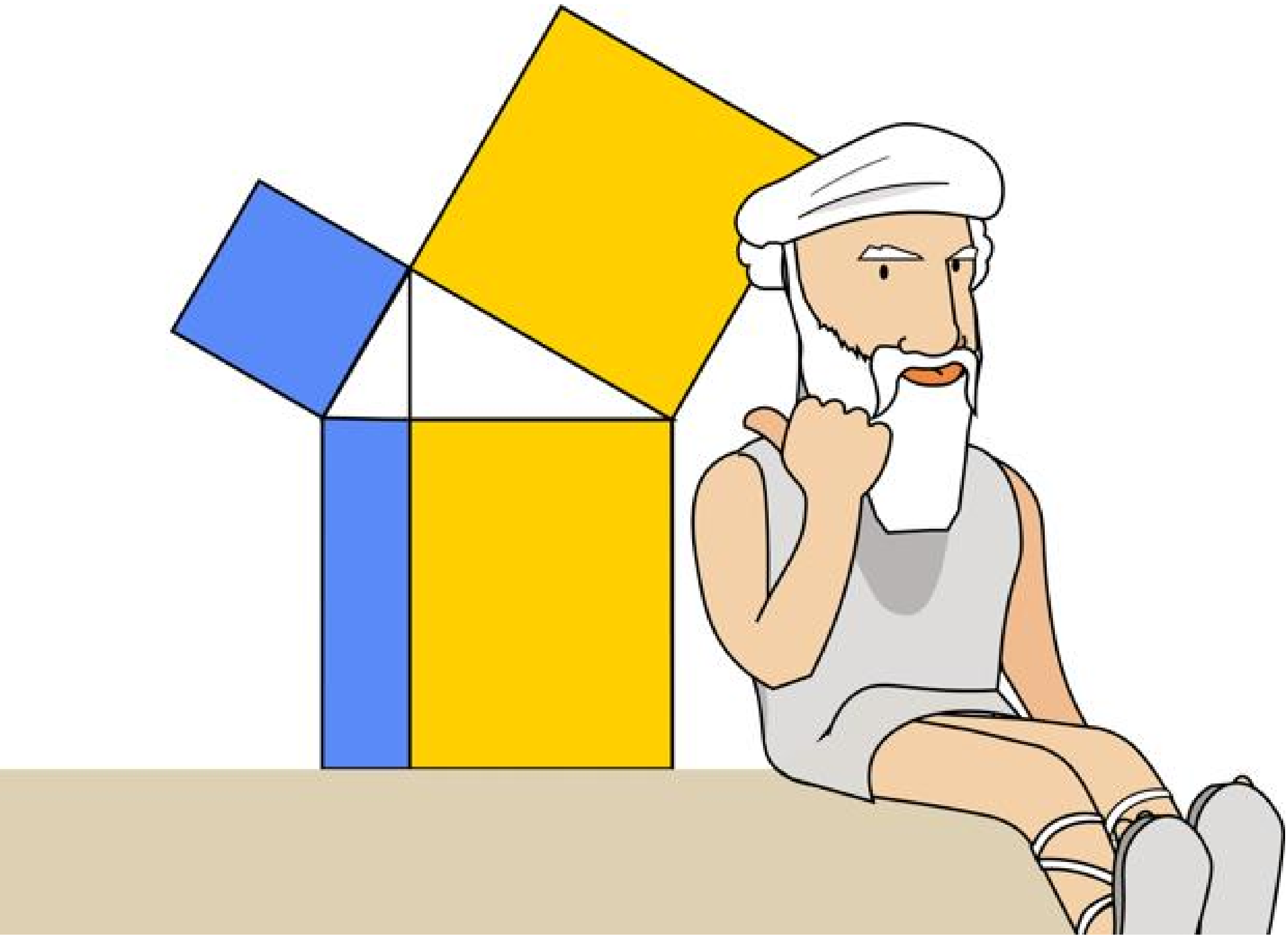
ABC, 4 de Noviembre de 2019
CIENCIA - El ABCdario de las matemáticas
Urtzi Buijs y Miriam González

El trabajo de los pitagóricos fue clave en la geometría. Además, crearon unos números representados con baldosas que permitieron demostrar resultados de forma visual, a veces de modo muy sencillo



Una representación de Pitágoras y su famoso Teorema

Si os pregunto quién es el matemático más importante de todos los tiempos, muchos responderéis que Pitágoras. En gran medida esta respuesta se debe al Teorema Universal que lleva su nombre. «universal» en sentido literal; **Martin Gardner**, el gran divulgador matemático del siglo XX, **lo propuso como símbolo** para transmitir al espacio exterior que hay vida inteligente en nuestro planeta.

Sin embargo, Pitágoras era tan solo la cabeza visible, **el líder de una sociedad secreta, quizás una secta**, que rendía culto a las matemáticas. Muchos de los resultados atribuidos a Pitágoras podrían ser obra de alguno de sus discípulos o discípulas. Un ejemplo de esto es el descubrimiento de los números irracionales por parte de Hipaso de Metaponto, quien **fue desterrado por desvelar su descubrimiento** contraviniendo una de las reglas de la secta Pitagórica. Pero la cosa no quedó ahí. Hay fuentes que afirman que la misteriosa muerte de Hipaso en un naufragio no fue tal, sino que fue el propio Pitágoras quien arrojó por la borda al pobre desgraciado.

«Todo es número»

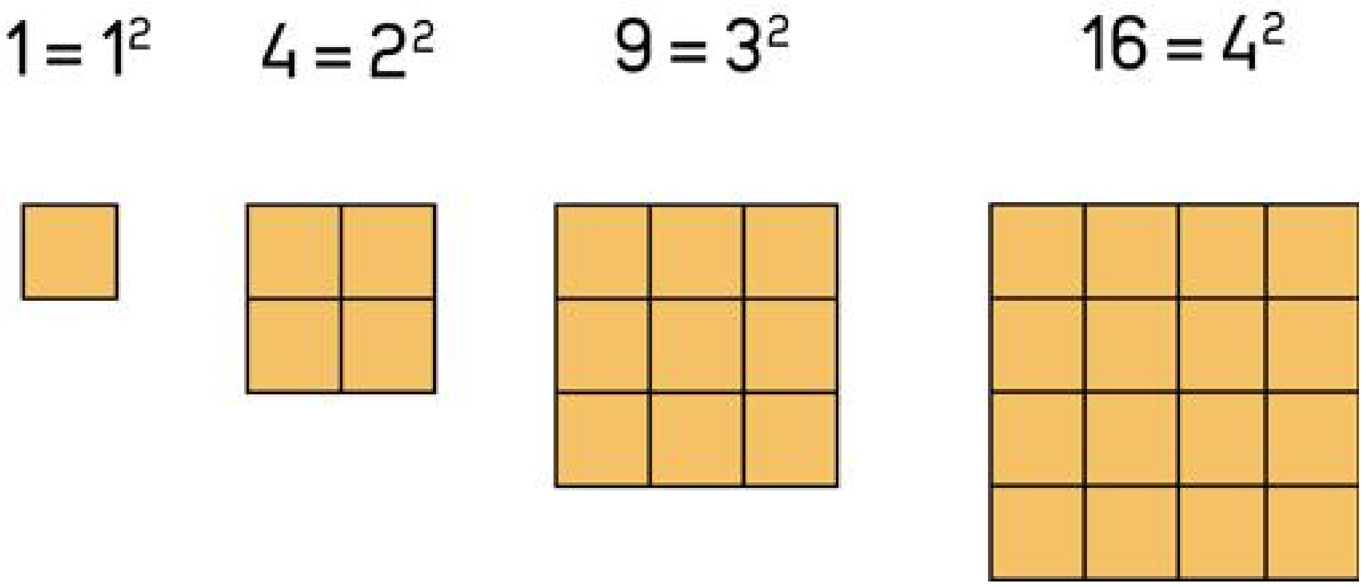
Pitágoras afirmó aquello de «Todo es número», donde por número se refería a los números naturales (1, 2, 3…), dando a entender que todo el Universo, desde la música hasta el movimiento de los planetas, se podía explicar con dichos números y las relaciones entre ellos, es decir, las fracciones.

¡Imaginaos el enfado que se llevó cuando Hipaso le mostró que **la razón entre la diagonal de un cuadrado y su lado** no puede escribirse como una fracción!

Es precisamente de estos números, los naturales, de los que vamos a hablar en este artículo y más concretamente de la forma en la que los veían los primeros pitagóricos. Para ellos **los números se representaban como un conjunto de pequeñas piedras o baldosas** y recibían nombres según la configuración geométrica de adoptaran, por ello los llamaremos

números figurados

. Por ejemplo, a los números 1, 4, 9, 16, 25... se les llamaba «números cuadrados» porque representaban cuadrados con tal número de baldosas.



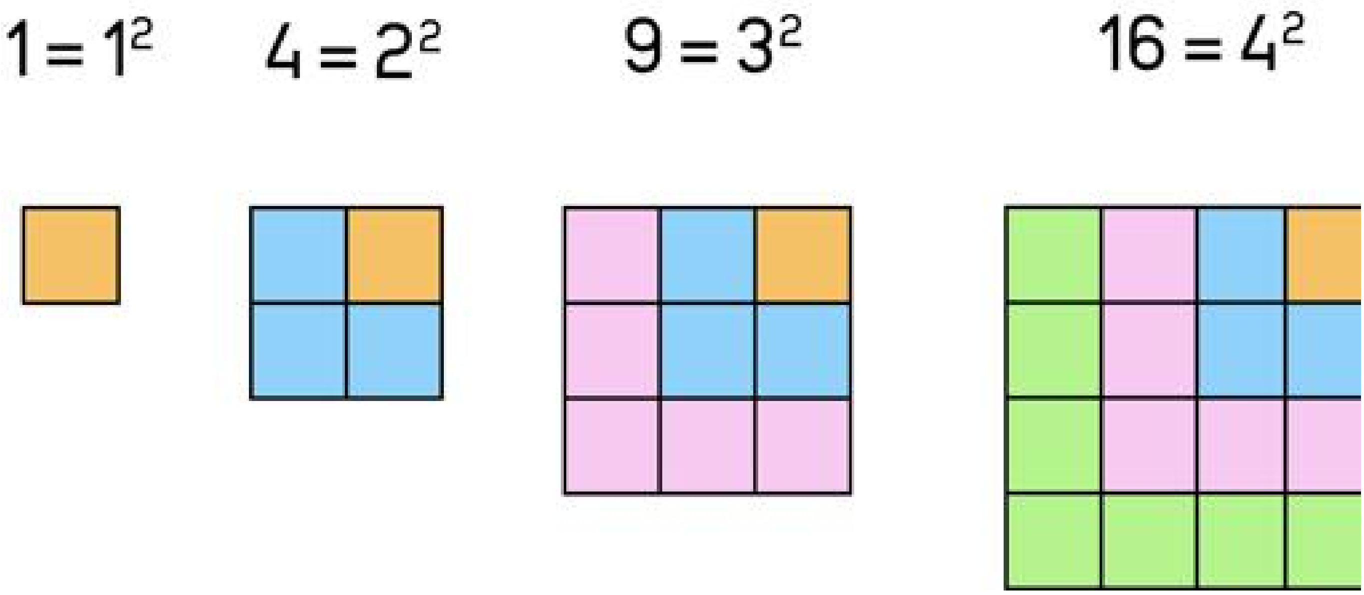
Esta terminología (la de números cuadrados) se sigue conservando hoy en día. Una de las ventajas de estos números figurados es que **podemos probar resultados a través de demostraciones visuales** cuyo argumento principal se resume en la expresión «¡mira!».

Ilustrémoslo con un ejemplo. Vamos a demostrar visualmente que la suma de los primeros N números impares es siempre un número cuadrado.

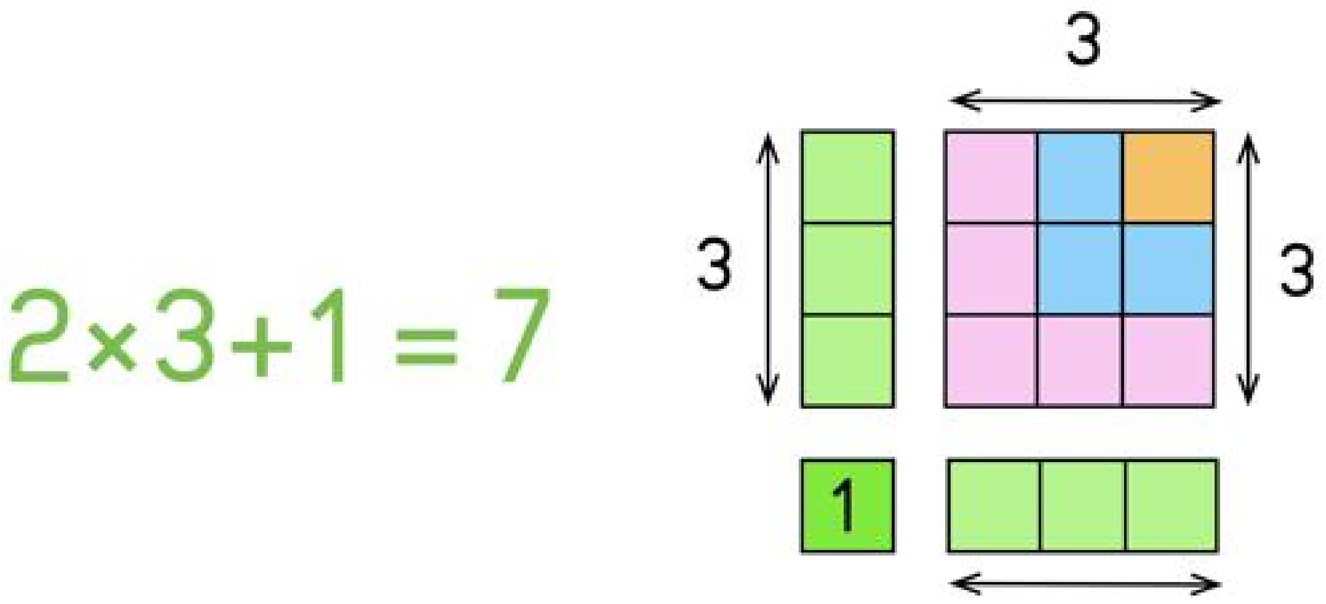
¿Esto es cierto? Primero vamos a comprobar algunos casos:

$$1=1^2 \quad ; \quad 1+3=4=2^2 \quad ; \quad 1+3+5=9=3^2 \quad ; \quad 1+3+5+7=16=4^2$$

¿Cuál es la razón misteriosa por la que esto es cierto? Si nos fijamos en el anterior diagrama, Todo número cuadrado se obtiene del anterior **adjuntando una figura en forma de L llamada gnomon** .



¿Cuántas baldosas forman cada L? pues precisamente dos veces el lado del cuadrado anterior y una baldosa más, esto es 2n+1. Y un número par (2n) más 1 es siempre un número impar.



Así que, por ejemplo, **el número cuadrado 25 se puede escribir como**:

25=16+(2x4+1)=9+(2x3+1)+(2x4+1)=4+(2x2+1)+(2x3+1)+(2x4+1)

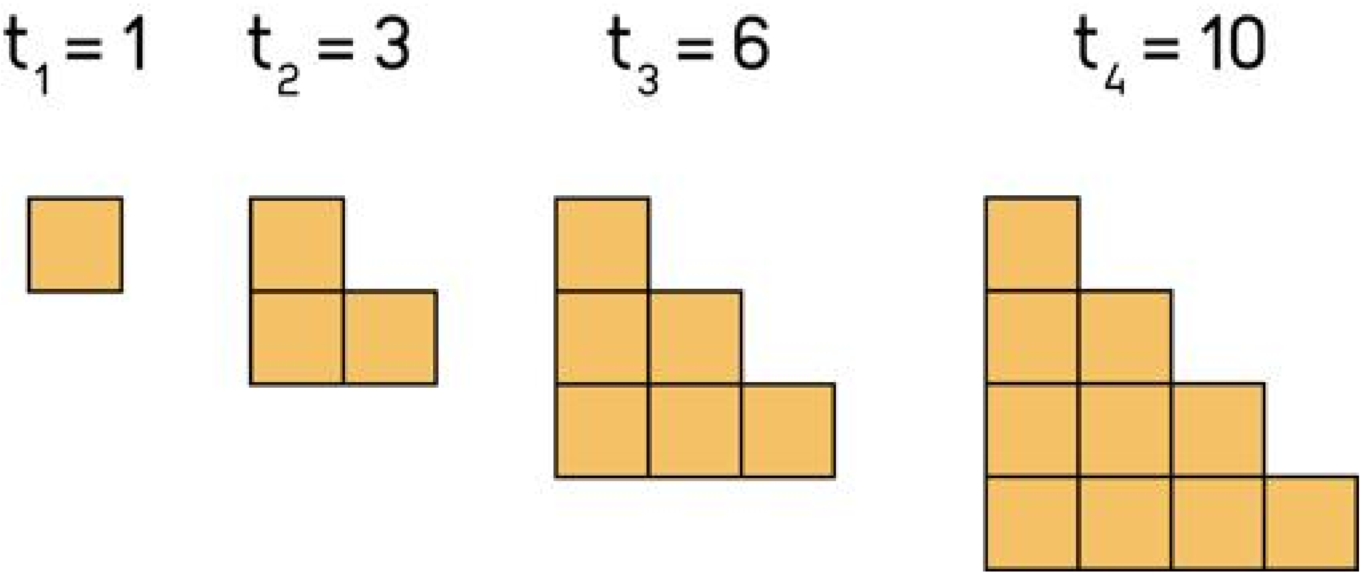
=1+(2x1+1)+(2x2+1)+(2x3+1)+(2x4+1)=1+3+5+7+9.

De este modo los diagramas anteriores nos ofrecen una demostración visual del Teorema.

Los pitagóricos también consideraron los números triangulares que son 1, 3, 6, 10, 15, 21, porque podemos colocar ese número de baldosas en disposición triangular.

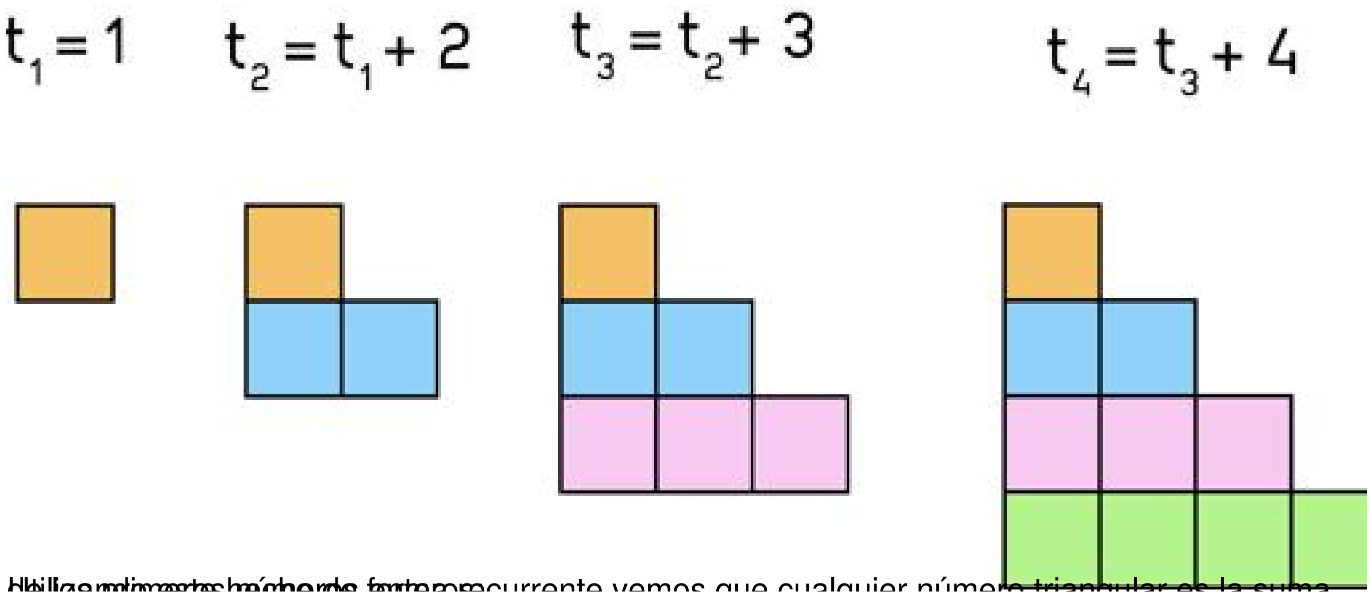
Vamos a dar nombre a estos números:

$$t_1=1;t_2=3;t_3=6;t_4=10;t_5=15$$



También podemos construir un número triangular a partir del anterior, añadiéndole piedras en la base. De este modo:

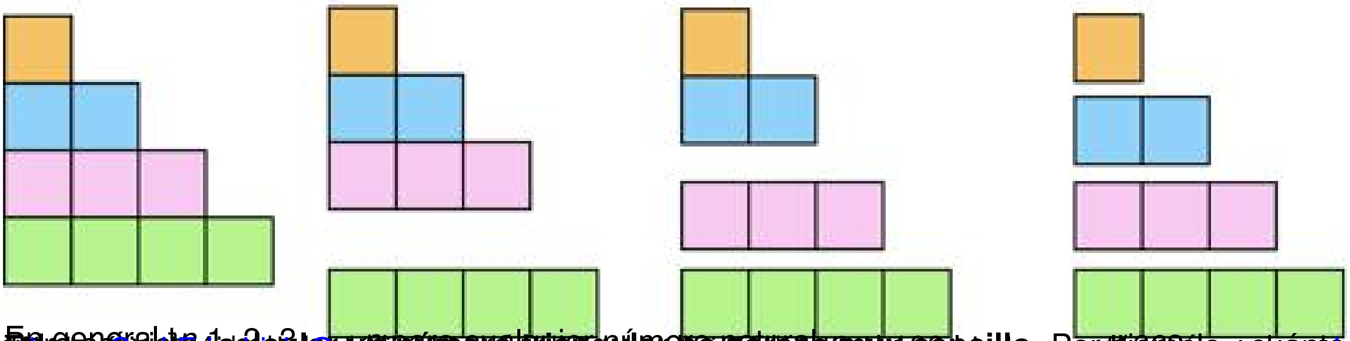
$$t_2 = t_1 + 2\,;\, t_3 = t_2 + 3\,;\, t_4 = t_3 + 4\,;\ldots$$

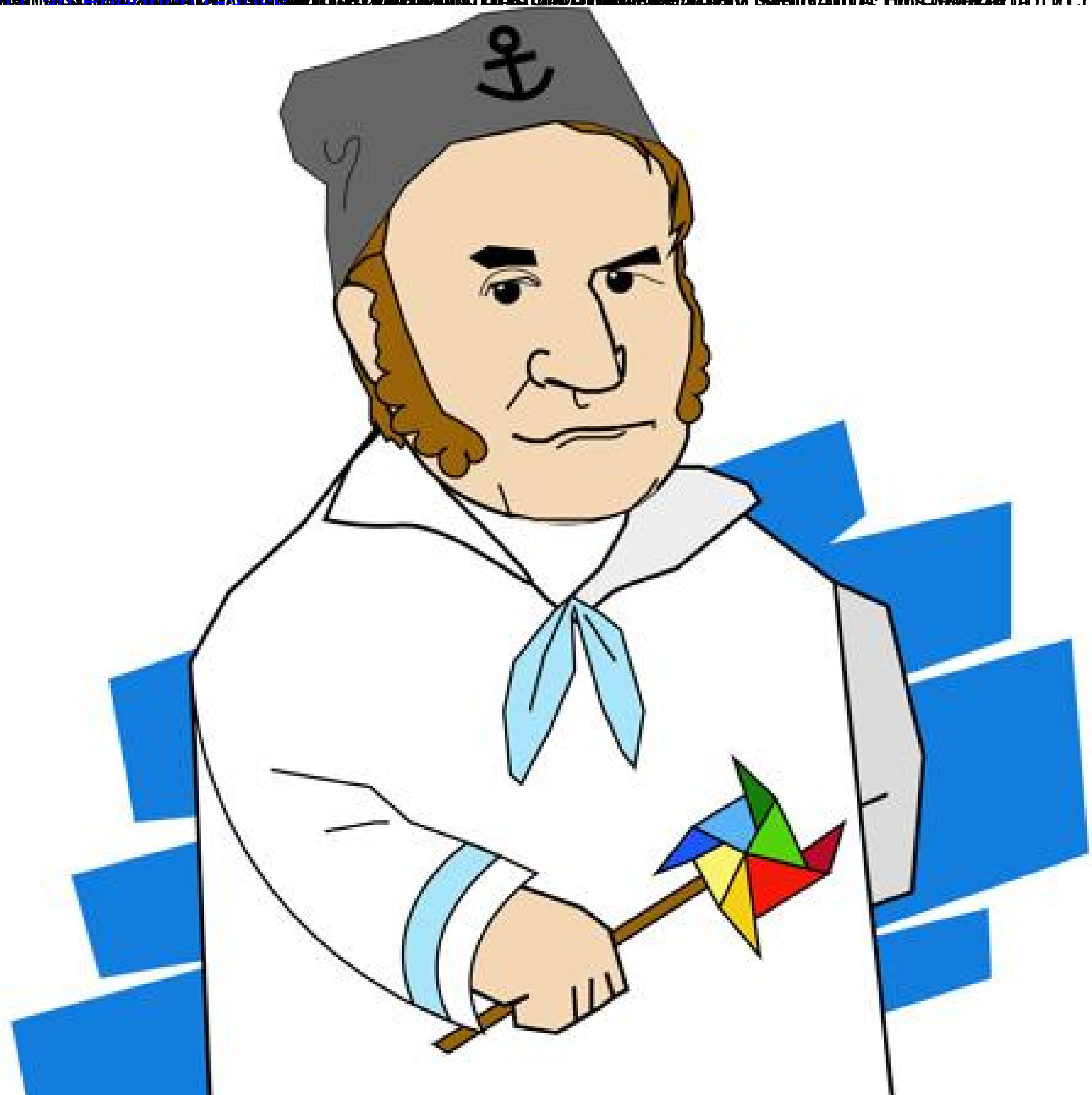


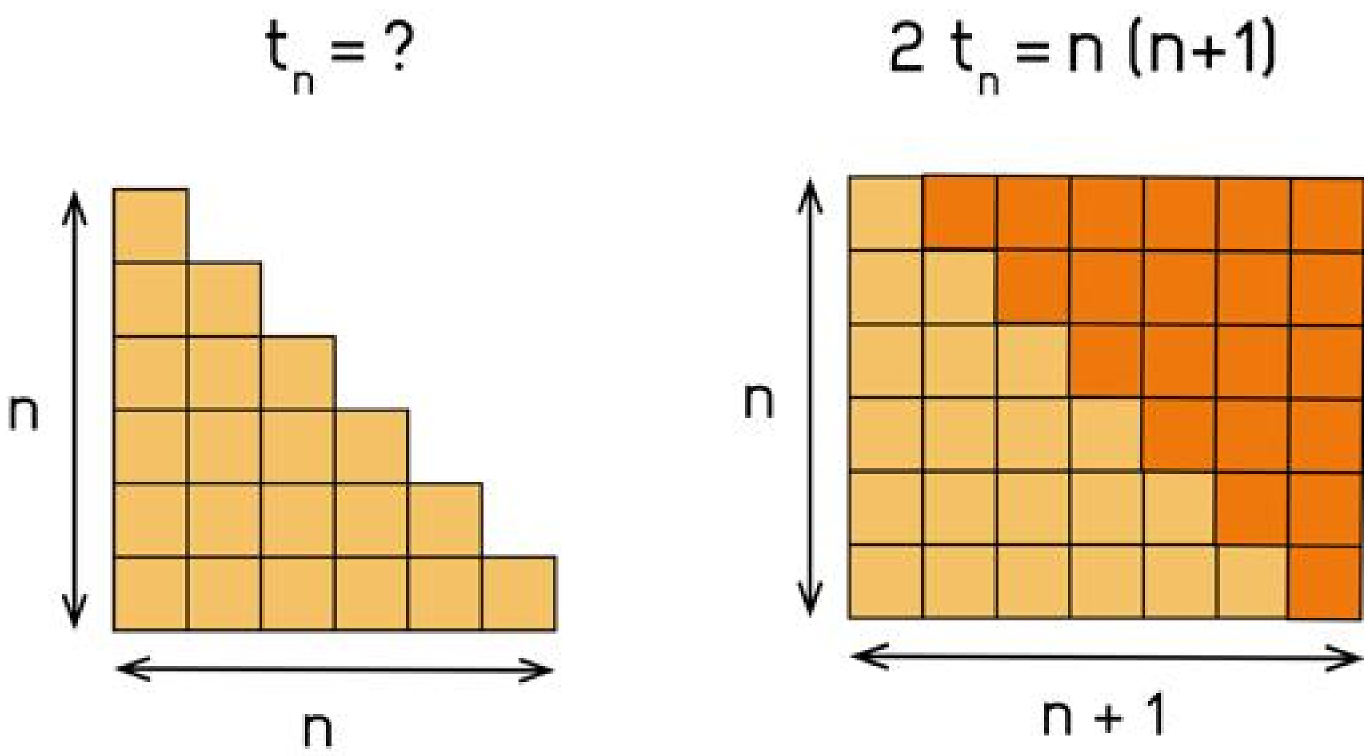
Utilizando esta fórmula recurrente vemos que cualquier número triangular es la suma
de los números naturales anteriores

$$t_4 = t_3 + 4 = t_2 + 3 + 4 = t_1 + 2 + 3 + 4 = 1 + 2 + 3 + 4$$

$$t_4 = t_3 + 4 = t_2 + 3 + 4 = t_1 + 2 + 3 + 4$$







Vemos que podemos contar el número de piedrecitas del rectángulo resultante de dos formas diferentes: por un lado son dos triángulos juntos y por lo tanto tenemos $2t_n$ piedrecitas. Pero por otro lado, dado que se trata de un rectángulo, podemos multiplicar el número de piedras de la base, esto es, $n+1$, por el número de piedras de la altura, esto es, , n, obteniendo $2t_n = n(n+1)$. Así que si despejamos el 2 de dicha ecuación obtenemos una fórmula sencillita para calcular el n-ésimo número triangular

$$t_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Así que Gauss solo tuvo que hacer el calculo $\frac{100(101)}{2} = \frac{10100}{2} = 5050$ para lograr su hazaña.

Pero os propongo el siguiente desafío. Imaginemos que el profesor de Gauss era u poco más malvado y les puso cómo tarea sumar los primeros 100 números cuadrados, esto es

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 100^2 = ?$$

¿Creéis que habría sido capaz Gauss de responder también cómo un relámpago a esta pregunta?

Matemática Española (RSME) ***Real Sociedad***