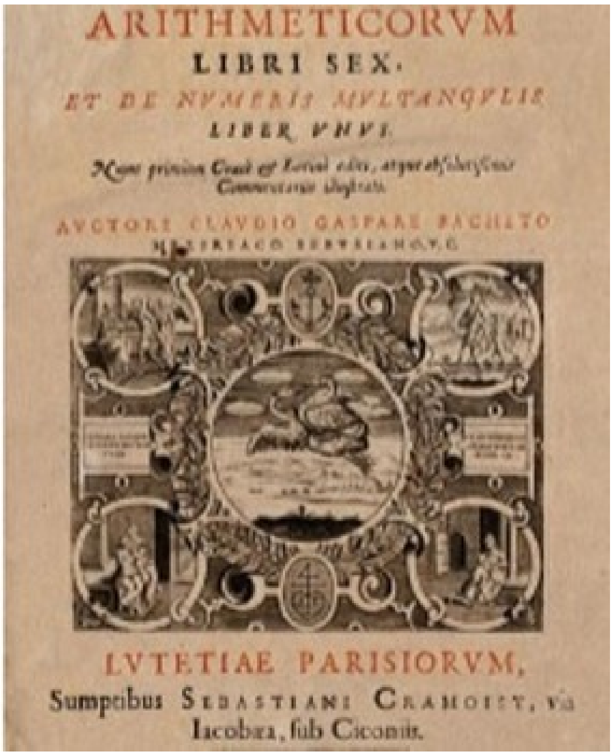
ABC, 25 de Marzo de 2019
CIENCIA - El ABCdario de las matemáticas
Pedro Alegría

El autor plantea cuál es el número mínimo de cubos para descomponer cualquier número

Pierre de Fermat (1607-1665) y portada de la obra Arithmetica de Diofanto

Como es bien conocido, el origen de las matemáticas está en la geometría pues los números surgieron para representar de forma simbólica magnitudes geométricas. Y uno de los primeros problemas clásicos de la geometría era el de **la cuadratura del círculo**: ¿cuáles debían ser las dimensiones de un cuadrado y cómo construirlo de modo que tuviera la misma área que un círculo dado?

Otros problemas de cuadratura han sido muy populares, aunque algunos más sencillos que otros: **el teorema de Pitágoras** resuelve el problema de saber cuál es el cuadrado cuya área es la suma de las áreas de otros dos cuadrados, ya que se trata precisamente de aquel cuyo lado corresponde a la hipotenusa del triángulo rectángulo de lados las dimensiones de los otros dos cuadrados. De esta forma, ya sabemos que, a veces, el cuadrado de un número es igual a la suma de los cuadrados de otros dos números.

Menos conocido es otro problema muy popular entre los geómetras de la antigüedad. Es muy sencillo comprobar que no todo número natural se puede expresar como suma de dos cuadrados pues hay multitud de ejemplos que lo demuestran. Por otra parte, también es sencillo probar que todo número natural se puede escribir como suma de varios cuadrados. Veamos por ejemplo cómo escribir los primeros números:

$1 = 1^2 2 = 1^2 + 1^2 3 = 1^2 + 1^2 + 1^2 4 = 2^2 5 = 2^2 + 1^2 6 = 2^2 + 1^2 + 1^2 7 = 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 \ldots$

Surgen así dos cuestiones: ¿qué tienen de especial los números que pueden escribirse como suma de dos cuadrados? y ¿cuál es la menor cantidad de cuadrados, si la hay, que hace falta para descomponer cualquier número natural?

Es bien sabido que el jurista francés **Pierre de Fermat** estaba muy interesado en este tipo de **problemas de teoría de números** desde que cayó en sus manos la traducción realizada por **Claude Gaspard Bachet** del libro Arithmetica escrito por **Diofanto de Alejandría** en el siglo III. El 25 de diciembre de 1640, Fermat escribió una carta a Gilles de Roberval, en la que le comunicaba lo que hoy conocemos como el **teorema de Navidad de Fermat** :

«Para que un número entero n se pueda representar como suma de dos cuadrados es

necesario que, después de dividirlo por el mayor cuadrado que lo tenga como factor, no se pueda dividir por un número primo de la forma 4k –1. Os confieso con franqueza que nunca he encontrado en la teoría de los números nada que me haya complacido tanto como la demostración de esta proposición y me gustaría que os tomaseis el esfuerzo de probarla, solo por saber si estoy estimando mi invención en más de lo que vale».

Una formulación más actual del teorema sería esta:

«Un número natural se puede representar como suma de los cuadrados de dos números enteros si, en su descomposición en factores primos, los primos de la forma 4k - 1 (caso de existir) tienen exponente par».

Resulta que esta condición es también suficiente y Fermat aseguró también que la descomposición es única. Fiel a su mala costumbre, no dio la demostración y fue **Leonhard Euler** el primero en publicar una prueba concluyente un siglo después. En particular, Fermat afirmaba que, si un número primo es de la forma p = 4k + 1, entonces se puede descomponer de forma única como suma de dos cuadrados y, en caso contrario, no se puede (salvo el 2, claro). Así pues, la descomposición es posible para los primos 5, 13, 17, 29, … pero no lo es para los primos 7, 11, 19, 23, 31, … El año más próximo que corresponderá a un número primo "válido" es 2029. ¿Serías capaz de escribirlo como suma de dos cuadrados?

Con respecto a la segunda pregunta, el propio Diofanto pensaba que cualquier número natural podía descomponerse en suma de, como máximo, cuatro cuadrados. Aquí, Fermat no se atrevió a asegurar que tenía la demostración pero, en 1770, **Joseph-Louis Lagrangedemostró finalmente que la conjetura de Diofanto era cierta**. Lo que no dice el teorema es la forma de conseguir la descomposición de cualquier número: el año en curso tiene una descomposición sencilla:

$2019 = 44^2 + 9^2 + 1^2 + 1^2$.

Ahora ya no es posible asegurar la unicidad. De hecho, en nuestro ejemplo tenemos estas otras descomposiciones:

$2019 = 43^2 + 13^2 + 1^2 = 41^2 + 17^2 + 7^2 = 40^2 + 19^2 + 7^2 + 3^2 = \ldots,$

pero también se conoce la fórmula que proporciona la cantidad total de formas en que un número puede descomponerse como suma de cuatro cuadrados, la cual fue descubierta por **C arl Jacobi**
en 1834. Según su fórmula, el 2019 se puede descomponer de 21.568 maneras como suma de cuatro cuadrados (aunque se cuentan también las distintas permutaciones y la posibilidad de utilizar números negativos).

Como el lector habitual a esta sección ya comprenderá, la comunidad matemática no se conforma con dar respuestas: siempre busca otras preguntas y se enfrenta a nuevos retos. En este caso, **Adrien-Marie Legendre** respondió a la cuestión de caracterizar los números que se pueden descomponer como suma de tres cuadrados y, en 1798, demostró que, si un número natural no es de la forma $4^k \cdot (8m + 7)$, es decir, no es el producto de una potencia de cuatro por un número que es siete unidades mayor que un múltiplo de ocho, entonces puede expresarse como suma de los cuadrados de tres números naturales.

Al igual que Fermat se propuso extender el teorema de Pitágoras a potencias de orden superior a dos, con las consecuencias ya conocidas, poco después de que Lagrange demostrara su teorema, **Edward Waring** se preguntó qué pasaría si se pretende descomponer un número como suma de potencias de orden superior. Por ejemplo, cuál es el menor número de cubos, si existe, que son necesarios para descomponer cualquier número. Enseguida se dio cuenta de que el número no sería pequeño pues

$23 = 2^3 + 2^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3 .$


Edward Waring (1736-1798)

¡Al menos hacen falta 9 sumandos! ¡Y con números muy pequeños! Cargado de optimismo, Waring conjeturó que nueve cubos serían suficientes para cualquier número y que 19 sumandos bastarían para descomponer cualquier número en suma de potencias cuartas. Las demostraciones rigurosas tardaron en llegar pero **Arthur Wieferich** logró la primera parte en 1909 y **Ramachandran Balasubramanian, Francois Dress y Jean Marc Deshouillers** probaron la segunda afirmación de Waring en 1986. Ya previamente, **David Hilbert** demostró que siempre habría una cota superior para el número de potencias de cualquier orden necesarias para descomponer cualquier número. De momento, hay una fórmula tentativa para el caso general, que ya ha sido comprobada para todas las potencias de orden hasta 471.600.000, conjeturada en 1936. Los primeros valores se encuentran en la fantástica

"On-line enciclopedia of integer sequences"
, bajo el epígrafe A002804.

Es una guerra sin cuartel: el problema parece resuelto pero la demostración completa parece lejana. ¿Los futuros ordenadores lograrán encontrar algún valor para el cual la fórmula es incorrecta? ¿Harán falta técnicas novedosas para conseguir probar que la fórmula es correcta?

Pedro Alegría es profesor de la Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea y miembro de la comisión de divulgación de la RSME.

El ABCDARIO DE LAS MATEMÁTICAS es una sección que surge de la colaboración con la Comisión de Divulgación de la Real Sociedad Matemática Española (RSME)