ABC, 13 de Enero de 2020
CIENCIA - El ABCdario de las matemáticas
Alfonso Jesús Población Sáez

La filosofía de las matemáticas podrían favorecer nuestra convivencia democrática. Además, nunca llegaremos a saberlo todo ni siquiera del más mínimo objeto, como un triángulo

El Congreso de los Diputados, vacío - Jaime García

De vuelta de las vacaciones de Navidad, empezamos el nuevo año con la sensación de llevar a las espaldas un montón de tiempo ya, merced a las muchas noticias que nos han deparado estos inicios del 2020. Siempre que se inicia un nuevo año, se espera de él que sea al menos no peor que el anterior, aunque como supongo que sabrán, los adjetivos calificativos (mejor, peor, etc.) no resultan adecuados cuando hablamos de cuestiones relacionadas con la Ciencia, y mucho menos con las Matemáticas, por su subjetividad. Es un asunto que me cuesta trabajo hacer entender a los alumnos cuando les tutelo un trabajo fin de grado, fin de máster o cualquier trabajo que tengan que hacer. **Adjetivos y adverbios, los menos posibles**. Se trabaja con hechos, con pruebas verificables, constatables, objetivas. Y todo lo que no sea así, ni siquiera se debe mencionar. Evidentemente, realizar afirmaciones falsas, de las que no se aporte demostración, no tiene cabida alguna y descalificaría completamente el trabajo. Por supuesto, aportar una prueba correcta de un resultado conlleva la gloria por los siglos de los siglos. Sería una verdad eterna (aquí me refiero exclusivamente a las matemáticas).

Contrariamente a lo que mucha gente piensa, **en Matemáticas no está todo descubierto**. Es más, con cada nuevo resultado surgen cientos, miles de nuevas cuestiones por resolver, debilitando las condiciones iniciales, cambiando unas por otras, sugiriendo nuevas conjeturas, siempre buscando la comprensión más completa del tema que tengamos entre manos. Al principio del devenir de la Humanidad, eran cuestiones de tipo práctico, reales y tangibles, pero conforme el ser humano fue mejorando el sistema, las Matemáticas fueron creciendo por su cuenta, planteándose aspectos totalmente teóricos, sin conexión aparente con la realidad. Sin embargo, en algunos casos, con el paso del tiempo, a veces siglos, y apareciendo nuevas situaciones en la vida de las personas, esos resultados, originalmente sin aplicación alguna, sirvieron para resolver esas cuestiones.

Cuando le preguntan a un matemático, a un profesor de matemáticas, una persona, un alumno, que **para qué sirve tal o cual cosa** (algo muy habitual), estamos ya cansados de explicarles estas cosas, y aunque solemos tratar de responder con la mejor de las intenciones, sabemos de antemano, por experiencia, que, en la mayor parte de las situaciones, no va a quedar resuelta la incertidumbre, y el interlocutor va a seguir pensando lo mismo. Como verán, estoy tratando de ser «políticamente correcto» (a día de hoy, ¿no les resulta esta expresión un oxímoron?), porque quizá lo que correspondería sería decir algo así como que «no ves más allá de tus narices».

La filosofía tras las matemáticas

Seguramente estén pensando que de qué va este rollo. O quizá algunos ya prevean que estoy preparando el camino para contarles hoy algo totalmente teórico. En realidad, de todo un poco, pero también tratar de explicar por enésima vez cuál es parte de la filosofía que existe detrás de la forma de trabajar en matemáticas. **La búsqueda de lo más general, de lo absoluto, del conocimiento total** sobre las cosas.

Pero también explicarles por qué determinadas cuestiones no tienen cabida, o qué podrían aportar las matemáticas a nuestra vida cotidiana, a nuestra convivencia democrática (no se sorprendan, que podrían, al menos, ahorrarnos muchas barbaridades y dislates). Imaginen que se presentan a un examen (no es difícil porque todos lo hemos hecho en nuestra etapa escolar). Hay que resolver unos ***ejercicios*** (en las Matemáticas profesionales, a lo que nos enfrentamos es a problemas, es decir, a algo que en principio no se sabe resolver, ni siquiera sabemos si puede resolverse).

En nuestra vida, en muchas ocasiones tenemos que resolver situaciones que podrían equipararse a los ***problemas*** de las Matemáticas. ¿Y qué hacemos? Evidentemente hay procedimientos que no sirven. ¿Rompemos el examen y nos olvidamos para siempre de él? Claramente suspendemos. ¿Intentamos copiar de alguno? Alguna vez podemos tener suerte, pero no es un método demasiado recomendable, y mucho menos porque en otra prueba posterior quizá haya que aplicar algo que no sabemos o no hemos entendido, con lo cual, tarde o temprano volvemos a encontrarnos con la misma situación. ¿Nos olvidamos de todo diciendo esto no es lo mío? ¿Compramos el aprobado?

Los que están para resolver los problemas

Estoy convencido que ninguna de estas propuestas les parecerá que resuelve nada. **Lo que hay que hacer, si queremos aprobar, es prepararse y enfrentarse a ello**
. Pues saben, hace unos días, lo que he visto en los señores que representan el espacio vectorial (el que sepa algo de matemáticas sabrá que eso son las bases del espacio vectorial, que deben ser linealmente independientes y sistema generador; que en el caso que voy a comentar no parecen cumplir ninguna de las dos cosas) y que
están para pensar en cómo resolver los problemas que se nos plantean
, en todos, absolutamente en todos sin excepción, parece que se limitaban a recurrir a alguna de las situaciones que he descrito.

Y desgraciadamente no se espera que cambien de estrategia, con lo cual, poco van a poder resolver (ojalá no sea así; soy pesimista por naturaleza, lo siento). Y cuando hay varios problemas, el matemático debe priorizar y ponerse a lo que considere más importante. Ha habido muchas ocasiones en que los matemáticos, para resolver algo, han definido conjuntos maravillosos, que cumplen unas propiedades estupendas, y son ideales para solventar una situación complicada. ¿Y saben qué? Que cuando han ido a ver si existía algún elemento dentro de ese conjunto, vieron que no, que era el ***conjunto vacío***. No servía por tanto de nada.

Es estupendo querer definir identidades, es muy rico, social y culturalmente. **Pero, ¿no será mejor asegurarse de que haya elementos en el conjunto?**
Porque hay subconjuntos que están vacíos, o se están vaciando, y estamos angustiados porque se están aplicando algoritmos para que el cardinal del conjunto total decrezca más y más. Eso sí, tendremos las etiquetas mejores del mundo, estarán definidas las fronteras genialmente (supongo que serán conscientes que delimitar fronteras lleva tarde o temprano a la destrucción, ya saben lo de la consanguinidad), pero a lo mejor no habrá punto alguno en el interior. En definitiva, es importante tener claro por dónde empezar.

Otra situación que ocurre con las matemáticas es que hay que tener cuidado con lo que se dice, pensarlo bien. Porque **cuando alguien dice algo equivocado, desde ese momento queda etiquetado** , a veces de por vida, como un charlatán al que no debe tomarse en serio. Se le escucha, porque somos educados, pero todo el mundo piensa lo mismo de él. Cada día, y no exagero, escucho o leo en los medios mentiras lanzadas adrede o equivocaciones sin querer, pero parece no importar demasiado, porque se ha constituido como máxima aquello de « **calumnia**

que algo queda
». Por cierto, aquel dicho atribuido a Mark Twain, entre otros, sobre mentiras, malditas mentiras y estadísticas hay que matizarlo. Las estadísticas no mienten, son sólo datos; los que lo hacen son los que las interpretan, bien por no tener demasiada idea, bien por perverso interés personal.

En cualquier caso, **señorías y ciudadanos en general, sería bueno acercarse un poco más a las matemáticas** : los primeros para no hacernos perder demasiado el tiempo (supongo que se habrán enterado que es finito, que tiende a cero, que aquí no nos vamos a quedar nadie, así que no lo desperdicien), y los segundos para no ser tan manipulables ni tan manipulados con argumentos retóricos absolutamente fuera de todo lugar. Existen problemas, y hay que resolverlos, hay que dar oportunidad a nuevos caminos y estrategias, utilizando las reglas que sabemos que funcionan, o si ya no sirven, desarrollando otras nuevas que sean lo más generales posible (o sea que mantengan el equilibrio de los subespacios vectoriales).

Decía **Alan Turing** (supongo que les sonará) que prefería los números a las personas, porque los primeros nunca te defraudan. Tienen unas normas, sabes a qué atenerte con ellos. Y es verdad, de modo que, vayamos con ellos que seguramente nos den más satisfacciones.

La maravilla de las matemáticas

Voy a mostrarles un ejemplo de que, por mucho que se crea conocer un determinado objeto, nunca acabaremos de saberlo todo. Seguramente a más de uno, siendo alumno, se le pasara por la cabeza que estaba harto de los triángulos. Se pueden llenar muchos volúmenes con propiedades de los triángulos (y así con cada superficie plana, y con cada volumen tridimensional, y no les digo nada si generalizamos las dimensiones). Vamos a ver una, una sola que a lo mejor no conocen.

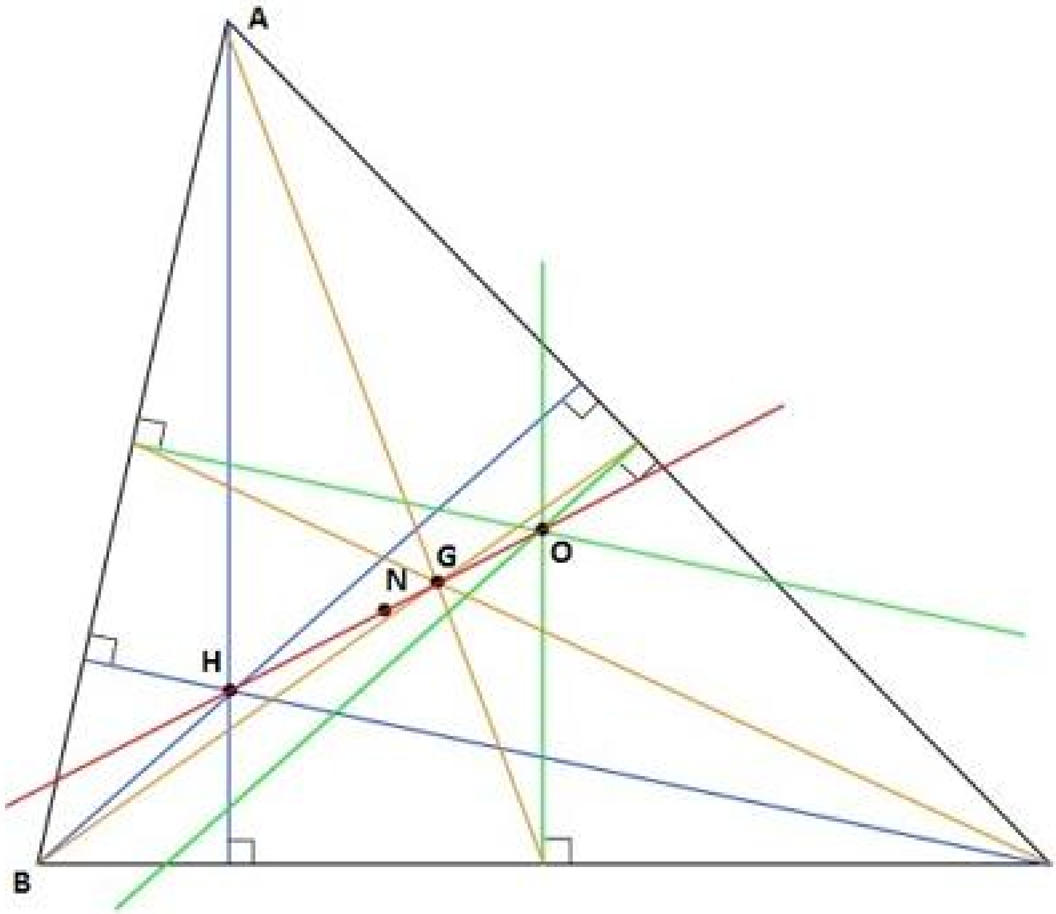
Espero que todo el mundo recuerde que **el triángulo es el polígono más sencillo**, que tiene tres vértices, tres lados y tres ángulos. Tiene más cosas por triplicado, pero al menos recordaremos esas, y que, según la longitud de los lados tienen un apellido (
equilátero
,
isósceles
y
escaleno
) y según sus ángulos le podemos añadir otro apellido más (
rectángulo

,
acutángulo
y
obtusángulo
). En ellos se definían también unas líneas (altura, mediana, mediatriz y bisectriz) y que, no me digan que no parece magia,
las tres alturas de cualquier triángulo, se cortan en un mismo punto (el ortocentro)
; igual que las tres mediatrices (el
circuncentro
, que además es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo); igual que las tres medianas (el
baricentro
, o centro de masas del triángulo); igual que las tres bisectrices (el
incentro
, que además es centro de la circunferencia inscrita al triángulo).

Seguro que ustedes entienden perfectamente que *por dos puntos cualquiera del plano pasa una única recta* (otro día les hablo de las *geo metrías no euclideas*
), es algo intuitivo además de demostrable. Pero que por tres puntos pase una misma recta (o sea que estén alineados), ya no es tan fácil, y mucho menos que por cuatro puntos cualesquiera pase una misma recta, y que cuantos más puntos añadamos, peor nos lo ponen (siento seguir haciendo leña de los árboles caídos, pero esto
me recuerda un poco a la lotería del Niño
: el décimo que compraron es la recta a la que se debían acomodar los cinco puntos, bolas en este caso, que salieron; aquí no hay infinitos casos, pero 10^5 ya son bastantes;
en fin, espero que no perdieran mucho)
.

Si están convencidos de que es bastante improbable que se alineen cuatro puntos, ¿no les parece maravilloso que ortocentro, circuncentro y baricentro **de cualquier triángulo** estén siempre alineados, y que si el triángulo es isósceles (dos lados iguales) también el incentro lo esté? Más aún, en la misma recta también se encuentran el
punto de Longchamps
, el
punto Schiffler
, el
punto de Exeter
y el
punto far-out
. Una recta con tantas propiedades había que darla un nombre propio, y como los matemáticos tenemos poca imaginación (dirán algunos), aunque más bien es que sabemos

apreciar la genialidad de nuestros antepasados, a tal recta se la denomina
recta de Euler
. En la imagen adjunta, las líneas azules son las alturas, las naranja las medianas, las verdes las bisectrices y la roja es la recta de Euler.



Con un programa de geometría dinámica pueden comprobarlo, pero ya saben que, eso no sirve en matemáticas: **hay que hacer una demostración**. Tranquilos, no se la voy a incluir (aunque es muy, muy sencilla) porque la pueden localizar en casi cualquier lugar en el que busquen « recta de Euler ».
Además, podrán comprobar que está directamente relacionada con otras maravillas (por lo inesperadas, sobre todo; seguro que alguno aprovechará para ponerse trascendente y pensar que todo esto no puede ser casual, que está muy bien pensado, pero tengan cuidado que de ahí a la seudociencia no queda nada) como son la
circunferencia de los nueve punto
s (un título sugerente para una novela, aprovechen; nosotros somos menos románticos y lo llamamos
Teorema de Feuerbach

).

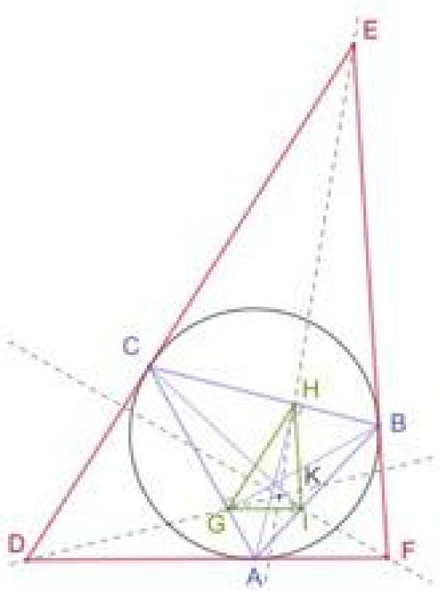
Pero es que la cosa va más allá. En la imagen anterior, *H* es el ortocentro, *N* el centro de la circunferencia de los nueve puntos, *G* el baricentro y *O* el circuncentro. Pues bien, siempre se verifica que, para cualquier triángulo, la distancia entre *H* y *G* es el doble de la distancia entre *G* y *O*, …, casi mejor se lo pongo con símbolos y acabamos antes:

$$HG = 2\ GO,\ ON = NH,\ OG = 2\ GN,\ NH = 3\ GN$$

La recta de Euler contiene otros muchos puntos notables del triángulo, algunos descubiertos no hace demasiado tiempo. Antes les cité algunos que les defino a continuación:

El ***punto de De Longchamps*** es el punto simétrico del ortocentro respecto del circuncentro. El nombre se debe al matemático francés de finales del siglo XIX Gaston Albert Gohierre de Longchamps.

El ***punto de Exeter*** se define del siguiente modo: si *DEF* es el triángulo tangencial del triángulo *ABC* (el triángulo tangencial de un triángulo no rectángulo es aquel cuyos lados son tangentes a la circunferencia circunscrita de *ABC* en sus vértices; por tanto la circunferencia inscrita del triángulo tangencial es la misma que la circunscrita al triángulo original), y A' , *B′*, *C′* son los puntos de intersección de las medianas de *ABC* con la circunferencia circunscrita de *ABC*, entonces *DA′*, *EB′*, y *FC′* se cortan en el punto Exeter. Fue descubierto en un taller de matemáticas por ordenador en la Academia Phillips Exeter (New Hampshire, EE. UU.) en 1986. En la imagen, el triángulo *DEF* es tangencial al triángulo *ABC*.



El ***punto de Schiffler***: si I es el incentro del triángulo *ABC*, entonces las rectas de Euler de los triángulos *ABI*, *BCI* y *CAI* se cortan en el punto *Schiffler*. Fue definido e investigado por el ingeniero y geómetra aficionado alemán Kurt Schiffler en

1985.

En un triángulo *ABC* cualquiera, si *A1* es el pie de la altura que va desde el vértice *A* al lado *BC* , y *Ma* es el punto medio del lado *BC* (definiéndose *B1* de modo análogo para la altura que va del vértice *B* al lado *AC* , y siendo *Mb* el punto medio del lado *AC*), entonces el punto de intersección de las rectas *A1Mb* y *B1Ma* está también en la recta de Euler.

Por supuesto, también estas afirmaciones tienen todas su demostración, y no es demasiado complicada (geometría elemental). Pero **fíjense qué curioso que logren alinearse tantos puntos tan distintos en la misma recta** (y hay más; a diferencia, hurgo más en la herida, de nuestros representantes políticos, que casi ni siquiera dos de ellos encuentran una recta común). Les dejo unas cuestioncillas (sencillas) por si quieren pensarlas un poco. En mi próxima reseño se las resuelvo, si nadie lo hace antes.

Un par de sencillas cuestiones

1.- Adelantándome a los que, a pesar del discurso inicial, sigan pensando que «¿esto para qué sirve?», la primera cuestión es una aplicación directa de la recta de Euler: Escojan tres puntos cualesquiera *A*, *B*, *C*, sobre una circunferencia (por simplificar pueden tomar la de centro (0, 0) y radio la unidad). Sea *R* el lugar geométrico definido por el ortocentro del triángulo *ABC* (es decir, la región del plano que forman todos los posibles ortocentros de todos los posibles triángulos *ABC*). A ver si son capaces de determinar cuál es el área de esa región

R
. Se resuelve en una línea, gracias a la recta de Euler.

2.- Habrán visto en redes sociales, en internet, en muchos sitios, como pasa cada año, operaciones aritméticas curiosas cuyo resultado es 2020. Por ejemplo, como suma de cuadrados hay un montón, como pueden comprobar en la imagen adjunta.

A ver si son capaces de **expresar 2020 como suma de números naturales consecutivos de todas las formas posibles** . Aunque no lo parezca, siendo sencilla, es bastante más complicada que la anterior (porque no basta con encontrar esas sumas «por la cuenta de la vieja»: hay que probar que son esas y no hay más).

¡Mucha suerte y Feliz Nuevo Año a todos!

Alfonso J. Población Sáez es profesor de la Universidad de Valladolid y miembro de la Comisión de divulgación de la RSME.

El ABCDARIO DE LAS MATEMÁTICAS es una sección que surge de la colaboración con la Comisión de Divulgación de la Real Sociedad Matemática Española (RSME)