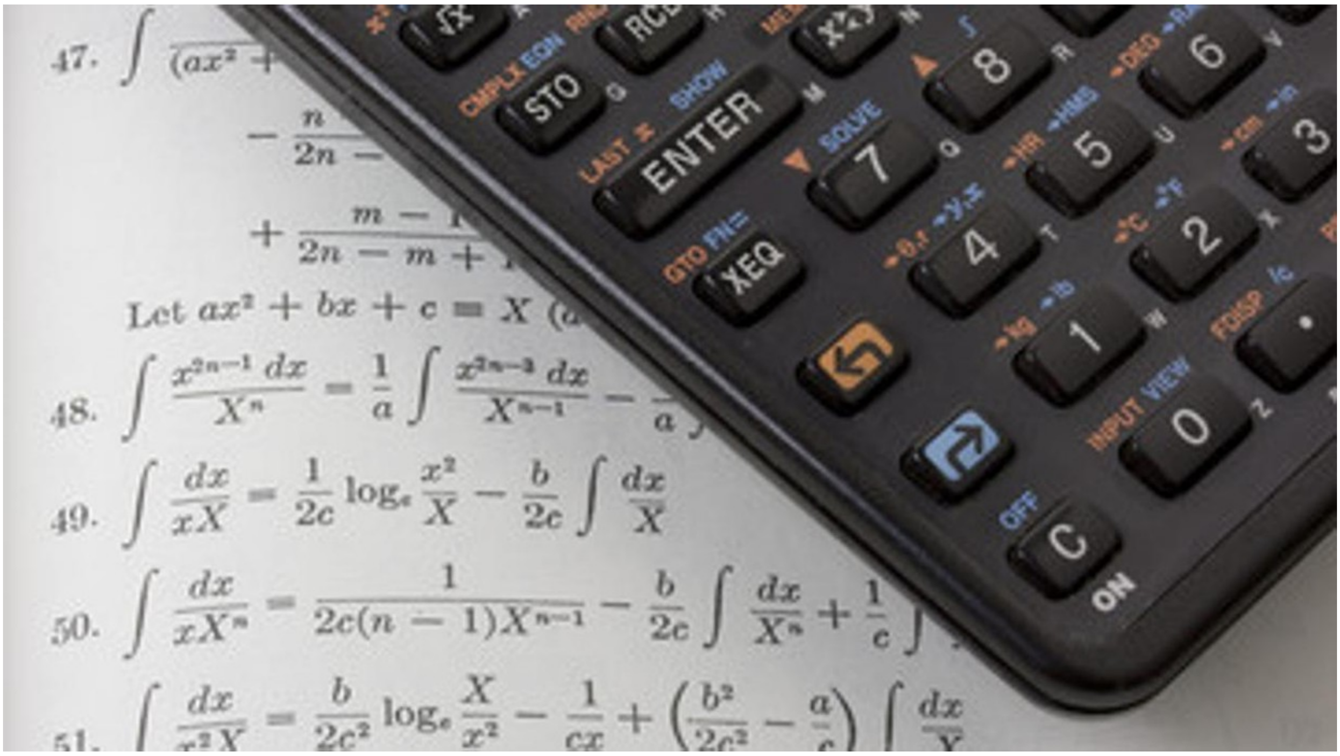
ABC, 25 de Noviembre de 2019
CIENCIA - El ABCdario de las matemáticas
Alfonso Jesús Población Sáez

Aparecen en muchas de las cosas que tenemos a nuestro alrededor y utilizamos habitualmente, desde las canciones a los contactos en una red social



Adobe Stock

Antes de nada, me gustaría expresar mi agradecimiento a todos los lectores que se acercan semanalmente a esta sección tratando de buscar alguna explicación, alguna noción o aplicación, por simple curiosidad o el motivo que sea, a las **matemáticas**. Y sobre todo a aquellos que enriquecen, opinan, critican y sugieren en el apartado de comentarios. Por supuesto por su maravillosa educación y respeto al hacer dichos comentarios.

Me gustaría responderlos todos y expresarles este agradecimiento, pero me es difícil (me llevaría mucho tiempo). En cualquier caso, no duden que los leo todos, al menos un par de veces, en distintos días y momentos (por aquello de que no influya mi estado de ánimo en su interpretación). En este tema de los **logaritmos**, he detectado dos grupos claramente diferenciados: los que lo conocen y dominan (a los que volveré a mencionar al final) y los que manifiestan su sentimiento de no acabar de entender algunas cosas (que consideran excesivamente técnicas; en ellos incluyo los que dicen no comprender nada). Estas reseñas tratan de ser entendibles por todo el mundo (no siempre se consigue; disculpas), sin que reproduzcan lo que aparece en los libros de texto (que están en general bien escritos, pero esto no trata de retornar a una clase tradicional), alternando a veces con reflexiones cotidianas (para que sean más llevaderas) y describiendo aplicaciones, en la medida de lo posible, que nos convenzan de la necesidad y potencia de las matemáticas.

Los que trabajamos con las matemáticas de uno u otro modo, nos quejamos con frecuencia de la deficiente cultura matemática de la sociedad. Eso incluye entender y no espantarse por fórmulas, símbolos, ni expresiones numéricas. Es más complicado manejar un móvil o un mando a distancia (que también se fundamentan en itinerarios lógico-matemáticos, por cierto). Sólo debería requerir un pequeño esfuerzo. Si aun así no entendemos la mayor parte (todo no porque, en efecto, alguna cosilla se intenta que sea de mayor nivel, para abarcar también a personas con más nivel), es que nuestra base matemática es baja.

También queremos transmitir que no debemos establecer una competición en “nivel de importancia” con las humanidades. Ninguna disciplina es más importante que las demás (y eso incluye aquellas que muchas veces consideramos “menores”, y no lo son, como la música, la educación física, etc.). Todas son necesarias y útiles. Y se complementan perfectamente, porque forman parte de la vida total de una persona.

De modo que, por favor, olviden expresiones como “yo soy de letras”, “la belleza está en la poesía”, y frases similares tan desafortunadas como huecas y falsas. De hecho, seguramente la disciplina más cercana a las matemáticas sea la filosofía (y podemos demostrarlo sin demasiada dificultad). Una de mis aficiones preferidas es el cine (aprovecho para recomendarles la sección Cine y Matemáticas que escribo desde hace dieciocho años en DivulgaMAT). Pues bien, en muchas más ocasiones me han llamado friki en conversaciones cotidianas por hablar de cine que por hablar de matemáticas. Y la frecuencia con que trato ambas es similar.

Finalmente, indicar que la reseña de los logaritmos era una pequeña introducción histórica de **por qué surgieron**. En efecto, son mucho más interesantes hoy en día sus aplicaciones que la multiplicación o división de números grandes. Pero quería que hiciéramos un viaje al siglo XVI y nos encarnáramos en personas de aquella época, para valorar sus pensamientos y trabajos. Con ello seguimos hoy….

Los retos propuestos

Comenzaremos resolviendo las cuestiones planteadas en el artículo anterior. Seguramente recordaremos en nuestros años escolares al profesor proponiendo ejercicios que posteriormente nunca corregía. Esa práctica (habitual cuando se va con el tiempo justo para terminar un temario o cuando el docente no percibe demasiado interés por parte de los alumnos hacia la asignatura) personalmente me enervaba bastante, sobre todo si había intentado resolver las cuestiones. ¡¡No sabías si lo habías hecho o planteado bien!! No digamos si no tenías ni idea de cómo resolverlo (y seamos sinceros: nunca se iba a preguntar al profesor a la sala de profesores o se pedía una tutoría, al menos en los años que yo cursé la enseñanza secundaria). De modo que no voy a hacer lo mismo, y voy a resolver lo que les planteé en los retos propuestos.

Reto 1: En primer lugar, habíamos tratado de encontrar mediante logaritmos (es decir, **hacien do sumas en lugar de multiplicaciones**
) el producto de 2828 por 5257. Para ello teníamos como única ayuda una sola hoja de las tablas de logaritmos decimales (en base diez) con valores entre 10 y 54 y cuatro cifras significativas. Obteníamos como solución solamente las cuatro primeras cifras del resultado, 1486, y les planteaba si, con la única ayuda de esa hoja y sus conocimientos matemáticos, se podría encontrar la solución exacta y completa, que es 14866796. En sus respuestas no he visto ninguna que haya abordado estas cuestiones, de modo que les indico la que he pensado yo, pero por supuesto, habrá otras, seguramente mejores.

Estarán de acuerdo en que podemos expresar 2828 como 2800 + 28, y 5257 como 5200 + 57. Entonces,

2828 • 5257 = (2800 + 28) • (5200 + 57) = (2800 • 5200) + (5200 • 28) + (2800 • 57) + (28 • 57)

Evidentemente no podemos romper la norma que nos hemos impuesto de no hacer multiplicaciones (por comodidad, vagancia, por ser tedioso, o porque no sabemos, por la razón que sea), pero si usaremos algo para lo que no hace falta esfuerzo alguno: que para multiplicar algo por una potencia de 10, basta con añadir tantos ceros como indique el exponente de esa potencia. Si nos fijamos en los cuatro paréntesis que nos han salido, tenemos que encontrar el valor de dos productos: 28 • 52 y 28 • 57. Para ello, tenemos que apañarnos SOLO con la hoja del artículo anterior.

La primera multiplicación es sencilla utilizando el procedimiento descrito el otro día:

$log_{10}(28) + log_{10}(52) = 1{,}4472 + 1{,}7160 = 3{,}1632$

Al aparecer en la parte entera un 3, sabemos que el número correspondiente tiene que estar entre 1000 y 9999. Recordemos la razón:

$log_{10}(10^3) = 3\ log_{10}(10) = 3$
$log_{10}(10^4) = 4\ log_{10}(10) = 4$

A continuación, buscamos en la tabla el valor 1632. El más cercano, sin sobrepasarlo, es 1614, que corresponde a la fila del número 14, columna 5. De modo que nuestro número empieza por 145. Para encontrar la cifra de las unidades, calculamos la diferencia entre el valor que buscamos, 1632, y el que aparece en la tabla, 1614, que es 1632 – 1614 = 18. En la tabla, en el apartado Partes Proporcionales, localizamos el número más próximo a 18. Resulta que 18 está exactamente en la columna del 6. Por tanto, el número que buscamos es 1456. Y en efecto, 28 • 52, es exactamente ese valor.

El primer paréntesis que teníamos era 2800 • 5200, que es lo mismo que 28 • 10^2 • 52 • 10^2, es decir, 28 • 52 • 10^4 (recuerden que para multiplicar potencias de la misma base se suman los exponentes), es decir, 1456 • 10^4, que es 14560000.

En el segundo paréntesis tenemos 5200 • 28, que es 28 • 52 • 10^2, y por tanto el resultado es 145600.

Para los dos paréntesis siguientes necesitamos conocer el producto de 28 • 57. Obviamente tenemos que hacer lo mismo que antes, calcular con ayuda de la tabla

$log_{10}(28) + log_{10}(57)$

Y encontramos un problema: lamentablemente 57 no está en nuestra hoja. Pero, ¡¡sabemos las propiedades de los logaritmos!! (que pusimos también en el artículo anterior). Probemos a poner el 57 como producto, cociente o potencia de otros números que sí aparezcan en la tabla. El primero que se me ocurre: 57 = 28.5 • 2. Entonces, por la propiedad del producto

$log_{10}(57) = log_{10}(28{,}5 \cdot 2) = log_{10}(28{,}5) + log_{10}(2)$

Nuevo contratiempo. Con la hoja podemos hallar el logaritmo de 28.5, pero, ¿qué hacemos con el 2? Seguramente hayan oído aquello de quien hace un cesto, hace ciento, así que simplemente tenemos que expresar el número 2 como producto, cociente o potencia de valores que se encuentren en nuestra hoja, es decir, entre 10 y 54. A mí se me ocurre así:

$$2 = \frac{50}{25}$$

Por tanto,

$log_{10}(2) = log_{10}(50/25) = log_{10}(50) - log_{10}(25)$

Recapitulando,

$log_{10}(28) + log_{10}(57) = log_{10}(28) + log_{10}(28{,}5) + log_{10}(50) - log_{10}(25)$

En la hoja de marras, encontramos entonces que

$log_{10}(28) + log_{10}(57) = 1{,}4472 + 1{,}4548 + 1{,}6990 - 1{,}3979 = 3{,}2031$

Y al buscar el valor 2031, llegamos al número de cuatro cifras 1596 (que es exactamente el valor de 28 • 57). Entonces, el tercer y cuarto paréntesis resultan ser 159600 y 1596. Por tanto,

2828 • 5257 = 14560000 + 145600 + 159600 + 1596 = 14866796

Recordemos que estamos realizando operaciones matemáticas como las hacían en los siglos XVI, XVII, XVIII, XIX, y parte del XX. Tenían dos opciones: o multiplicar números enormes (de 25 cifras por 40 cifras, no este ejemplillo que hemos utilizado) o utilizar las tablas de logaritmos.

Estarán conmigo que mejor la segunda opción; aunque parezca larga, con práctica, es mucho más rápida y segura (sin cometer errores) que la primera. Y por supuesto, ¡¡¡benditas calculadoras y ordenadores!!! Sería absurdo negar la evidencia.

Reto 2: ¿Hay alguna operación que no podamos hacer SOLO con la hoja que hemos venido empleando? Porque da la impresión de que podríamos hacer cualquiera. Y si fuera así, ¿para qué se necesitaba el famoso libro de tablas que generaciones anteriores tenían que comprar complementariamente al libro de texto?

Sinceramente. no me he puesto a pensar una multiplicación o división concreta que no pueda hacerse con esa hoja. Supongo que algo del tipo 9769 • 8645, es decir, valores claramente fuera del intervalo entre 10 y 54. Pero da igual. Mi intención era mostrar que, con conocimientos no muy extensos, se puede sacar mucho partido a una simple hoja. Seguramente por ello se dejó de exigir comprar esas tablas, y los libros de texto añadieron en las hojas finales, media docena de tablas (las logarítmicas y las trigonométricas) con las que hacer cualquier cálculo que fuera necesario (por supuesto con fines exclusivamente didácticos, como he pretendido hacer aquí; en mi época de BUP ya había calculadoras, aunque desgraciadamente, estaban prohibidas en clase y en los exámenes. ¡¡Gran error!! Lo que hay que hacer es ENSEÑAR A USARLAS BIEN, no prohibirlas, y debo decir, bien alto que, A DIA DE HOY SIGUEN SIN HACERLO.

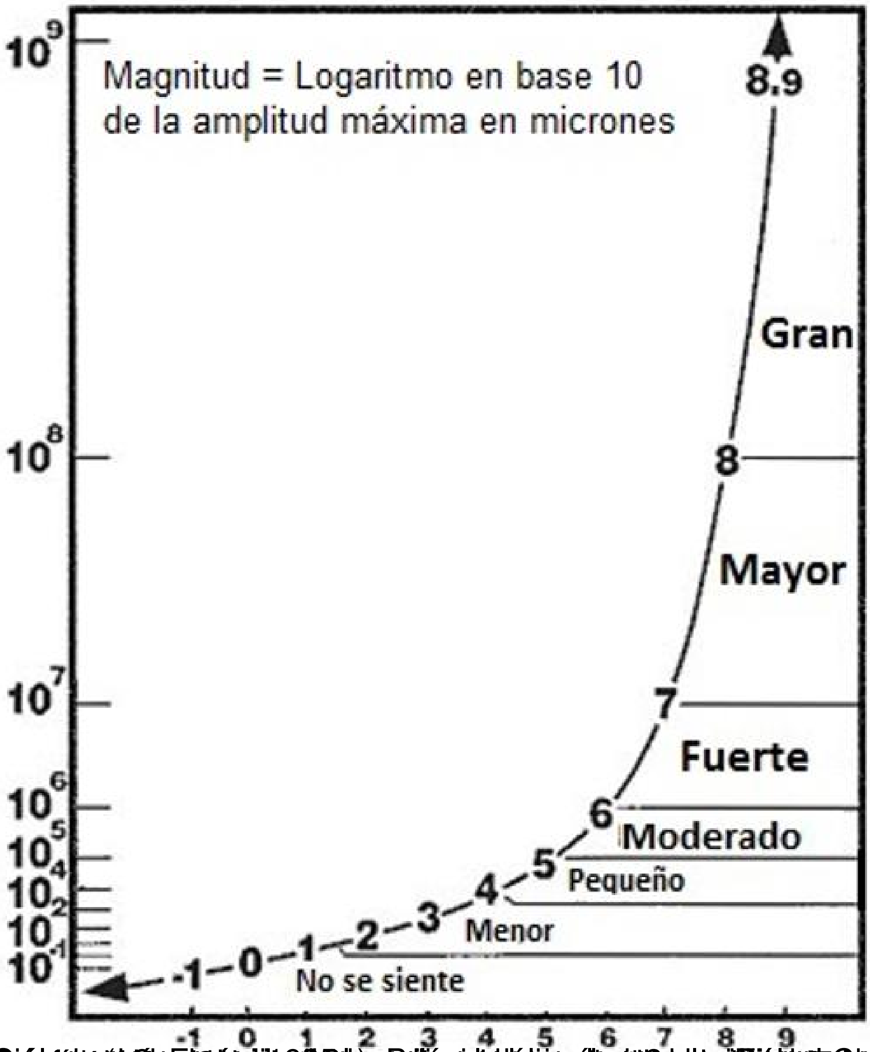
¡¡Aburrimos a nuestros alumnos!! La tecnología está para ser usada, señores. No quiero salirme del asunto, y por supuesto, veo que cada día los alumnos operan peor, no tienen soltura con las operaciones, DEBEN ejercitarse, pero eso no significa que no aprendan a manejarse con las herramientas adecuadas, que para eso están. Lo que les he contado está muy bien como repaso histórico, para comprender que la ciencia no se ha sabido desde siempre, para VALORAR lo que tenemos hoy, pero nada más. El alumno de hoy debe resolver y entender otro tipo de situaciones, porque las matemáticas permiten hacerlo, y no las estamos sacando ni la décima parte del potencial que tienen).

La respuesta a por qué tantas tablas, es evidente: por comodidad, para no tener que dar las vueltas que hemos dado hoy con este ejemplo. Igual que hoy compramos un ordenador o un móvil mucho más potente que el que necesitamos (aunque más de uno sea para **jugar a marcianitos con gráficos mejores**
; porque no se engañen: nos venden el mismo juego mil veces y lo pagamos como tontos. El juego es el mismo de toda la vida, lo único que cambia son los gráficos, el sonido y cuatro tonterías. Pero nos encanta la superficialidad de estar a la última. Me alegro, esencialmente, por mis alumnos del grado de informática. Tienen el futuro asegurado sólo con retocar un poco el programa básico de siempre).

Bases distintas

Volviendo a los logaritmos, cualquiera que esté siguiendo esta columna pensará en este punto que, si todo se puede hacer con los logaritmos en base diez (logaritmos decimales), ¿para qué en base 2, base 3, los neperianos (base el número e)? La respuesta es que cada base es conveniente para según qué problema abordemos. Por ejemplo, la base 10 es útil para saber el orden de magnitud de una cantidad, sin tener que conocerla exactamente. En el ejercicio que hemos hecho hemos visto que

$log_{10}(1596) = 3,021$



♫	ESCALA							
NOTA	1	2	3	4	5	6	7	8
Do	65.406	130.813	261.626	523.251	1046.502	2093.005	4186.009	8372.018
Do#	69.296	138.591	277.183	554.365	1108.731	2217.461	4434.922	8869.844
Re	73.416	146.832	293.665	587.33	1174.659	2349.318	4698.636	9397.273
Re#	77.782	155.563	311.127	622.254	1244.508	2489.016	4978.032	9956.063
Mi	82.407	164.814	329.628	659.255	1318.51	2637.02	5274.041	10548.082
Fa	87.307	174.614	349.228	698.456	1396.913	2793.826	5587.652	11175.303
Fa#	92.499	184.997	369.994	739.989	1479.982	2959.955	5919.911	11839.822
Sol	97.999	195.998	391.995	783.991	1567.982	3135.963	6271.927	12543.854
Sol#	103.826	207.652	415.305	830.609	1661.219	3322.438	6644.875	13289.75
La	110	220	440	880	1760	3520	7040	14080
La#	116.541	233.082	466.164	932.328	1864.655	3729.31	7458.62	14917.24
Si	123.471	246.942	493.883	987.767	1975.533	3951.066	7902.133	15804.266

Aplicaciones

Los lectores han dado muchas aplicaciones en los comentarios de la reseña anterior. Cada una de ellas merecería una explicación detallada que ahora, visto el tamaño que ha alcanzado ésta, no debo desarrollar. Simplemente enumero algunas, y con ello, a ver si convenzo a aquella persona afirmaba que en su vida diaria nunca ha necesitado de los logaritmos, excepción hecha de tener que aprobar un examen de matemáticas del curso correspondiente. Aparecen en muchas de las cosas que tiene a su alrededor y que usa habitualmente (seguro que alguna vez ha escuchado alguna canción; ya he puesto el ejemplo de las escalas musicales), pero no lo sabe. Hablemos, por ejemplo, de la **ley de Fechner**, en psicología, que establece que la intensidad de nuestras percepciones varía según el logaritmo natural (el neperiano) de la intensidad de un estímulo. Hablamos de determinar el crecimiento o decrecimiento de una planta, la evolución de una sustancia radiactiva o de un virus (biológico o informático), de cómo se disuelve una determinada sustancia en una disolución, hablamos de las conexiones entre los contactos de una red social, hablamos de determinar la acidez de una sustancia (cálculo del pH), hablamos de acústica en la determinación de los decibelios (nivel de intensidad) de los sonidos. Podemos llenar varias páginas, pero resumiendo tal y como lo ha expresado un lector en su comentario, que lo ha hecho magistralmente: en **cualquier fenómeno de tipo exponencial para el que queramos encontrar relaciones entre su comportamiento y sus causas**
, en los que pequeños cambios provocan grandes variaciones (pero determinados y conocidos, a diferencia de los que estudia la teoría del caos), el manejo de los logaritmos es, nos guste o no, IMPRESCINDIBLE.

A modo de cierre

En el año 1914, historiadores de la Ciencia, matemáticos, profesores, conmemoraron por todo lo alto la aparición de las primeras tablas de logaritmos en 1614, la creación del barón escocés, matemático aficionado y fanático religioso **John Napier**. Le llevó 20 largos años confeccionarlas. El mundo estaba agradecido por tan útil regalo. Cien años después, en 2014, todos llevamos en el bolsillo mucho más que unas tablas, que ya no son necesarias, ni nadie enseña cómo se utilizan, porque es bastante tedioso, como hemos visto. Nadie recordó que durante tres siglos eran imprescindibles, pero, sobre todo, nadie se acordó de **la genial idea de poder calcular multiplicaciones mediante sumas y divisiones mediante restas**
. Y lamentamos tener que leer algo que no vamos a emplear nunca más de ese modo. Pero me ha parecido que es instructivo recordar alguna vez que hubo un tiempo en el que el hombre no disponía de casi nada, y se tuvo que apañar, con un ingenio que, a lo mejor por culpa de la comodidad de las máquinas, hoy brilla por su ausencia (en todos los órdenes).

Alfonso J. Población Sáez es profesor de la Universidad de Valladolid y miembro de la Comisión de divulgación de la RSME.

El ABCDARIO DE LAS MATEMÁTICAS es una sección que surge de la colaboración con la Comisión de Divulgación de la Real Sociedad Matemática Española (RSME)