ABC, 18 de Noviembre de 2019
CIENCIA - El ABCdario de las matemáticas
Alfonso Jesús Población Sáez

Aunque muchos piensen que se aprenden demasiadas matemáticas en el colegio, sus aplicaciones tienen muchas más aplicaciones cotidianas de las que pensamos

John Napier, el primer matemático en definir los logaritmos

Hace ya algunos meses, estando de albergue con nuestros hijos, un grupo de padres nos encontrábamos paseando entre montañas (un lugar tan bueno como cualquier otro), y charlando con uno de ellos, me acabó preguntando (suele pasar) sobre la necesidad de que los chicos tengan que estudiar "tantas" **matemáticas**. Por supuesto, le argumenté que en realidad no son tantas y es más que sería conveniente que aprendieran algunas más, o por lo menos, en algunos temas, con un enfoque en el que se constate su relevancia en nuestra vida cotidiana. Entonces me preguntó por, según su calificativo, los "dichosos" logaritmos, que él en particular no llegó nunca a saber para qué servían. Aunque traté de hacerle ver algunas de sus aplicaciones, evidentemente no era el lugar más adecuado para entrar en muchas profundidades, ni para ponerme a dar una clase, pero volví a constatar el gran desconocimiento y desconexión que los padres tienen del **currículo escolar** de sus hijos (hablamos de matemáticas, pero probablemente esta situación es trasladable a otras asignaturas).

Y este hombre, al menos se lo plantea, porque estoy convencido que a otros muchos (probablemente la mayoría) lo que aprenden sus hijos les importa más bien poco, fenómeno que se agudiza al pasar a la educación secundaria (en primaria, parece que estamos más concienciados de lo que van a aprender, seguramente porque son pequeños y aún no nos han cansado mucho). Por otro lado, en mi última entrada, hablé de algoritmos diferentes al clásico para multiplicar números grandes, así que el recuerdo con el que he empezado me viene de perlas para enlazar ambas cosas, por lo que hoy hablaremos de los logaritmos (no confundir algoritmo con logaritmo; no sé por qué hay confusión: tampoco es lo mismo mejillones y,…, canelones, ¿no? Aunque ahora que me fijo, antes de la terminación "ritmo" están las mismas letras, pero en otro orden; curioso).

Fugaz repaso histórico

A partir del siglo XVI los cálculos que se necesitaban hacer empezaban a ser de números grandes. El perfeccionamiento en las técnicas de navegación, las investigaciones en Astronomía, el cálculo de préstamos e intereses en la floreciente actividad económica, fueron los principales temas que requerían largas multiplicaciones, divisiones, etc. Por supuesto aún no existían calculadoras (aunque también empezaba a haber intentos). Y hacer los cálculos resultaba tedioso y podían cometerse errores, pero eran imprescindibles. Así que algunos matemáticos y científicos comenzaron a pensar sobre cómo facilitar esas cuentas.

Según indican los estudiosos de la Historia de las Matemáticas, ya Arquímedes se había planteado algo en esta dirección (recordemos que Arquímedes es del siglo III a. C. y que fue un gran solucionador de cuestiones prácticas, por lo que necesitaba también efectuar abundantes cálculos). Comparando una progresión aritmética (primera fila de la tabla adjunta, n) con una geométrica (segunda fila de la tabla, 2^n), se dio cuenta de que para multiplicar 128 por 512, en realidad no tenía más que sumar los valores de n de los que provienen (es decir, 7 + 9 = 16), y luego ir al lugar donde esté ese valor, que resulta ser 65536 (que es el producto de los dos números indicados). Obviamente necesita la tabla en cuestión, y que los números que necesita multiplicar estén en la tabla.

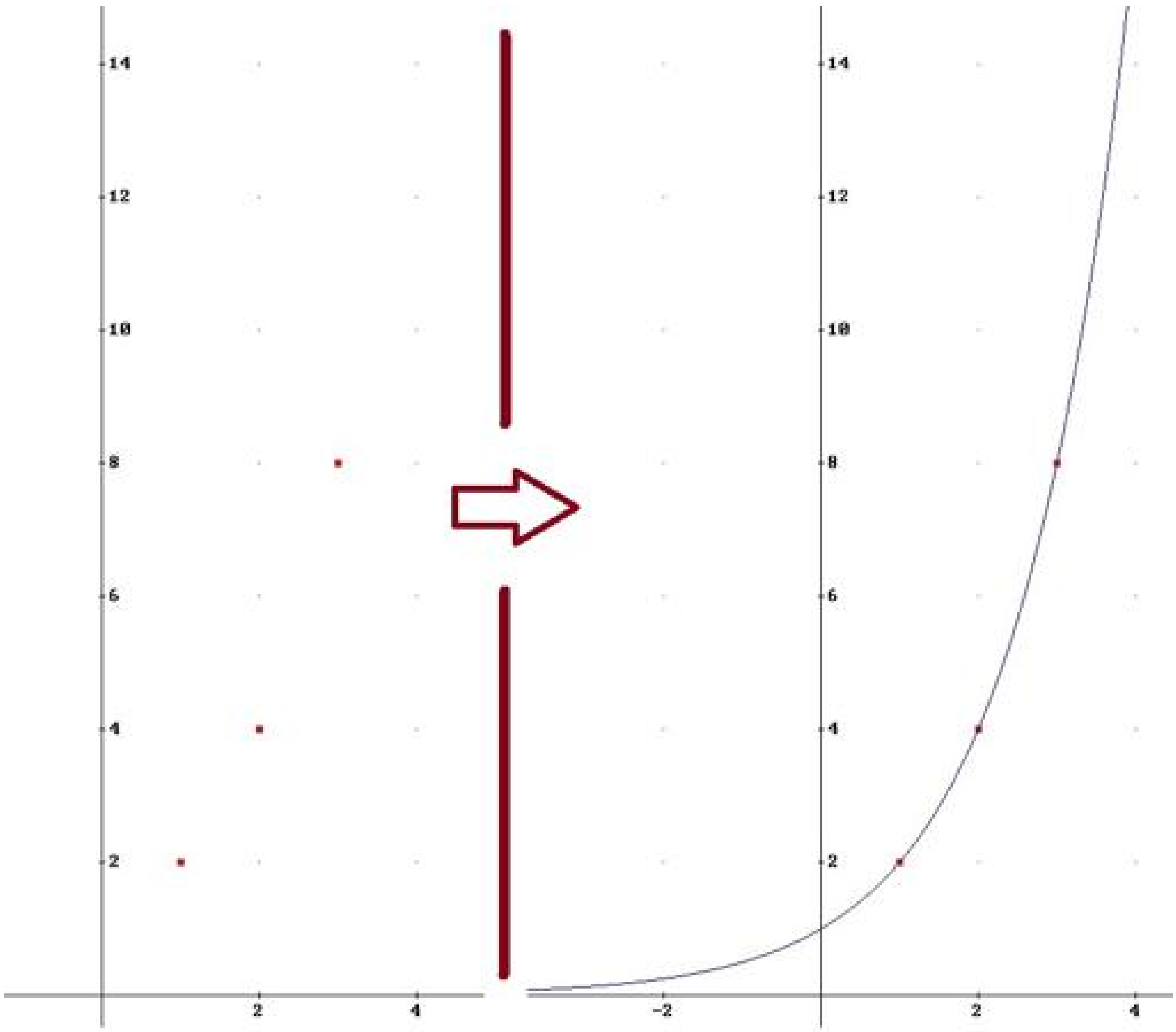
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16384	32768	65536

Para cualquier lector actual que haya entendido algo de la enseñanza primaria, esto no es más que una conocida propiedad de las potencias, aquella de que “para multiplicar potencias de la misma base, basta sumar los exponentes”:

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Pero, ¿cómo hago para multiplicar cualquier par de números? ¿Es que todos están en alguna tabla? ¿Y si dos números están en tablas diferentes? Afortunadamente, estamos en el siglo XXI (no cojan aún el móvil, la calculadora o el ordenador, no hagan trampa aún, que eso vendrá después) y el conocimiento matemático ha crecido mucho y bien. Gracias a eso podemos utilizar el concepto de función.

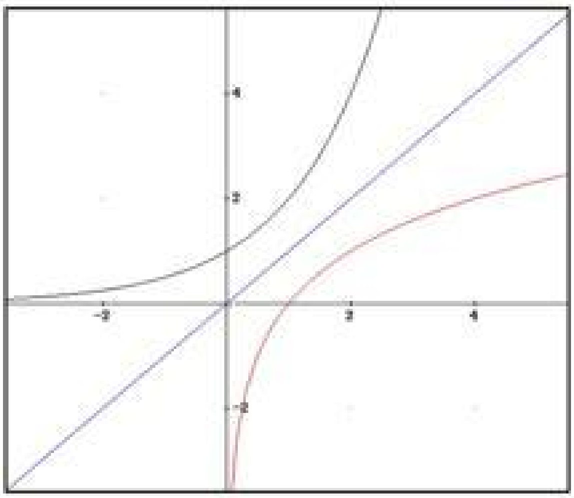
Ese 2^n de antes, únicamente tomaba valores enteros para el exponente n (1, 2, 3, …), es decir, si lo llevamos a una gráfica, sólo tenía unos “pocos” valores (pocos entrecomillado, porque son infinitos). Pero ¿qué ocurre? Sólo aparecen tres puntos rojos (tres valores), porque el siguiente, 2^4 = 16, se nos sale de la gráfica. Los valores crecen potencialmente, muy rápido, y no “caben” en la escala que ponemos. Podemos hacer más pequeña esa escala, pero da igual, sólo veríamos un par de puntos más a lo sumo. Esto es importante para entender una de las aplicaciones de los logaritmos que comentaremos más adelante.



Como decía, gracias a la noción de función, podemos extender los valores del exponente a “más” n’s. Ampliar el dominio, que decimos los matemáticos, y en vez de que n sea sólo válida para números enteros, que lo sea para números reales. Para diferenciarlo, introducimos una letra diferente, la x. Y así aparece la función f(x) = 2^x, cuya representación gráfica es ahora la señalada en color azul (he dejado los tres valores de antes, para que se vea que hemos “extendido” los posibles valores).

Obsérvese a partir de la gráfica que ahora se recorren en el eje vertical (eje de ordenadas) todos los pasibles valores de cero a infinito (ese es el conjunto imagen de la función), y no sólo el 2, el 4, el 8, etc. De modo que, si queremos buscar el 13, por ejemplo, sobre el eje OY, hay un valor en el eje OX (eje de abscisas) cuya imagen mediante la función es precisamente 13. Matemáticamente esos valores se encuentran mediante la función inversa, que es, en efecto la que suponen, la función logaritmo. En este caso como la base de la función potencial era el 2, el logaritmo es el logaritmo en base 2. Si hubiéramos dibujado la función 10^x, su inversa sería el logaritmo en base 10 (también llamado logaritmo decimal). En general, resulta por tanto que

$$y = log_a x \text{ si, y sólo si, } a^y = x$$



En la siguiente gráfica vemos en negro la función potencial 2^x, en rojo su inversa, la función logaritmo en base 2, y en azul la bisectriz del primer y tercer cuadrante, y = x. La inversa de cualquier función, de existir, SIEMPRE es SIMÉTRICA respecto de esa bisectriz con la función de partida. Es decir, si doblamos por la línea azul, tienen que coincidir ambas funciones.

Fíjense que la gráfica roja, la logarítmica, sólo existe desde cero a infinito (o sea, que su dominio, su campo de existencia, son esos valores). No se puede por tanto intentar calcular el logaritmo de un número negativo, es una burrada. Por supuesto estoy hablando cuando trabajamos con números REALES, que alguien veo por ahí ya queriendo ponerme verde porque si trabajamos con números complejos sí es posible.

Por supuesto fueron muchas las personas involucradas en el desarrollo de todo esto que resumimos aquí en pocas líneas, y mucho el tiempo empleado. Entre ellos destacamos a Jobst Bürgi, John Napier y Henry Briggs, los dos últimos responsables además de confeccionar tablas numéricas con los valores de los logaritmos en diferentes bases. Seguro que muchos de ustedes recuerdan un librito que tenían que comprar además del de matemáticas en la escuela, las famosas tablas de logaritmos, una de cuyas últimas ediciones aparece en la imagen adjunta. Otro día les cuento cómo se confeccionaban dichas tablas, ahora veamos porqué fueron tan importantes.

Multiplicaciones de números grandes

Después de la idea teórica, bajemos a lo concreto. Supongan que necesitan multiplicar 2828 x 5257 (la idea sirve para números tan grandes como se quieran, pero les pongo un ejemplo no muy grande por abreviar), sin hacer la multiplicación, es decir, mediante una suma, que es más rápido y sencillo. Recordemos las propiedades elementales de los logaritmos, válidas en cualquier base a positiva:

$$log_a(xy) = log_a x + log_a y, \quad \text{con } x > 0, y > 0, a > 0$$

$$log_a \frac{x}{y} = log_a x - log_a y, \quad \text{con } x > 0, y > 0, a > 0$$

$$log_a x^y = y\, log_a x, \quad \text{con } x > 0, y > 0, a > 0$$

$$log_{10} 2828$$

Como los valores están entre 10 y 54, lo que vamos a hacer es buscar en la tabla

$$log_{10} 28.28$$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Partes Proporcionales 1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3285	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

[illegible] tenemos que saber,

$$
\begin{aligned}
log_{10} 1 &= 0 \\
log_{10} 10 &= 1 \\
log_{10} 100 &= 2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
log_{10} 10^n &= n
\end{aligned}
$$

[illegible]

$$log_{10} 28.28 = 1.4514$$

Vamos con el 5257. Necesitamos calcular

$$log_{10} 5257$$

Como la tabla sólo nos llega hasta el 54, calculamos

$$log_{10} 52.57$$

Procediendo como antes, se obtiene

$$log_{10} 52.57 = 1.7208$$

Ahora, según la primera propiedad

$$
\begin{aligned}
log_{10}(28.28 \cdot 52.57) &= log_{10}(28.28) + log_{10}(52.57) \\
&= 1.4514 + 1.7208 = 3.1722
\end{aligned}
$$

[illegible]

[illegible] Real Sociedad Matemática Española (RSME) [illegible]