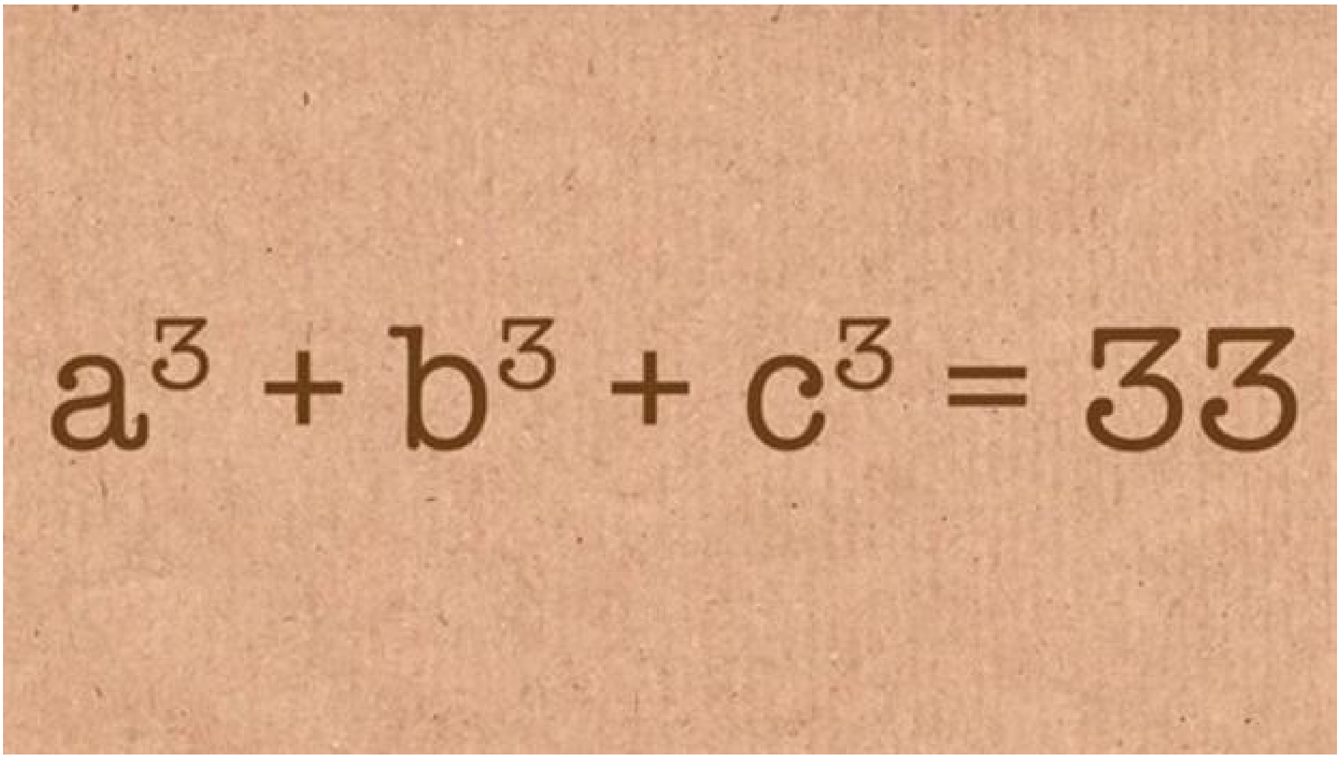
ABC, 8 de Abril de 2019
CIENCIA - El ABCdario de las matemáticas
Alfonso Jesús Población Sáez

El reto con el 33 ha sido descifrado por Andrew Bookerm, de la Universidad de Bristol



Problema matemático resuelto el pasado mes de marzo - YouTube

Hace un par de semanas, nuestro compañero Pedro Alegría nos hablaba sobre la posibilidad de descomponer números enteros como suma de cuadrados, de cubos, etc., tirando del hilo del teorema de Pitágoras o del último teorema de Fermat (en ellos es únicamente con dos sumandos, pero nada nos impide hacerlo con más (problema de Waring). Hace unos días ha sido noticia un resultado relacionado, en el que un
matemático británico
(abstrayéndose del no menos difícil problema del «

Brexit
») daba a conocer que había encontrado una solución a un asunto planteado hace mucho tiempo (unos cuantos siglos nada más).

Seguramente ustedes no se lo hayan planteado, pero no sé si sabrán que, si tienen un cubo (imagínense un terrón de azúcar, una caja de cartón de lados cuadrados, o un simple cubo de Rubik) pongamos que de **2 unidades de lado** (o sea con un volumen de 8 unidades cúbicas), es imposible dividirlo en otros dos cubos más pequeños cuya suma de volúmenes sea la inicial, 8. En términos numéricos, si $8 = x^3 + y^3$, no se pueden encontrar valores enteros para x, y que verifiquen la ecuación. Eso es lo que dice el último teorema de Fermat en el caso de exponente cúbico. Vale, está demostrado (Andrew Wiles lo hizo) que no se puede. Pero, ¿y si lo quiero poner como suma de tres cubos? Es decir, ¿existen valores enteros x, y, z tales que
$x^3 + y^3 + z^3 = 8$
?

Como 8 es un cubo (2^3), aunque no es una solución muy elegante, seguramente alguno de ustedes diga: Fácil, $0^3 + 0^3 + 2^3 = 8$. Incluso, algunos otros vayan un poco más allá y se hayan percatado de que $a^3 + (-a)^3 + 2^3 = 8$ también, sea quien sea el entero a. Para un matemático esto no es más que un ejemplo obtenido casualmente; necesita saber por qué, y si hay algún otro caso particular semejante. Esto no le resulta demasiado complicado:

$$
\begin{aligned}
&x^3 + y^3 + z^3 = 8\\
&x^3 + y^3 = 8 - z^3\\
&(x + y)\,(x^2 - x\,y + y^2) = 8 - z^3
\end{aligned}
$$

Es decir que el factor (x + y) es un divisor del segundo miembro $8 - z^3$, y por tanto cuando es cero (es decir, cuando z = 2), la igualdad se cumple si x + y = 0, que es lo mismo que decir que y = –x. Por tanto, la tripleta (x, –x, 2) resuelve la cuestión que habíamos encontrado “a ojo”. El otro factor, $x^2 - x y + y^2$, no sirve porque sólo es nulo cuando una de las variables es un número complejo, y sólo nos interesan valores enteros. Para verificarlo no tienen más que intentar resolverlo con la conocida fórmula que nos enseñaron en la escuela de las ecuaciones de segundo grado (tomando x como incógnita, e y como constante):

$$x^2 - x\,y + y^2 = 0$$

$$x = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4y^2}}{2} = \frac{y \pm \sqrt{-3y^2}}{2}$$

[illegible]

$$x^3 + y^3 + z^3 = k,$$

[illegible]

$$a \equiv b \pmod{n} \text{ si, y sólo si, existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } a - b = k\,n$$

[illegible]

$$\begin{aligned}
1^3 &= 1 \equiv 1 \pmod{9}\\
2^3 &= 8 \equiv 8 \pmod{9}\\
3^3 &= 27 \equiv 0 \pmod{9}\\
4^3 &= 64 \equiv 1 \pmod{9}\\
5^3 &= 125 \equiv 8 \pmod{9}\\
6^3 &= 216 \equiv 0 \pmod{9}\\
7^3 &= 343 \equiv 1 \pmod{9}\\
8^3 &= 512 \equiv 8 \pmod{9}
\end{aligned}$$

[illegible]

TAREA

¿Puede ser el número

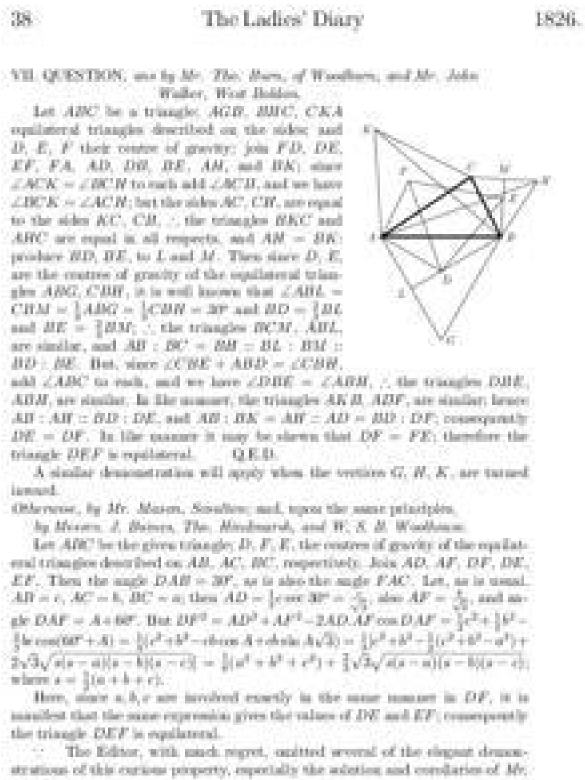
$$10\underbrace{\ldots\ldots}_{2019}070\underbrace{\ldots\ldots}_{2019}07$$

ser el cubo de algún número (la llave indica que hay 2019 ceros entre medias)?
¿Y si cambiamos el 7 de las unidades por un 9?

[illegible]

$$((1 + 9\,m^3)^3, (9\,m^4)^3, (-9\,m^4 - 3\,m)^3)$$

[illegible]


38 The Ladies' Diary 1826.

VII. QUESTION, ans. by Mr. Tho. Burn, of Woodhorn, and Mr. John Walker, West Boldon.

Let ABC be a triangle; AGB, BHC, CKA equilateral triangles described on the sides; and D, E, F their centres of gravity; join FD, DE, EF, FA, AD, DB, BE, AH, and BK; since $\angle ACK = \angle BCH$ to each add $\angle ACB$, and we have $\angle BCK = \angle ACH$; but the sides AC, CH, are equal to the sides KC, CB, $\therefore$ the triangles BKC and AHC are equal in all respects, and $AH = BK$; produce BD, BE, to L and M. Then since D, E, are the centres of gravity of the equilateral triangles ABG, CBH, it is well known that $\angle ABL = CBM = \frac{1}{2}ABG = \frac{1}{2}CBH = 30°$ and $BD = \frac{2}{3}BL$ and $BE = \frac{2}{3}BM$; $\therefore$ the triangles BCM, ABL, are similar, and $AB : BC = BM : BL : BM :: BD : BE$. But, since $\angle CBE + ABD = \angle CBH$, add $\angle ABC$ to each, and we have $\angle DBE = \angle ABH$, $\therefore$ the triangles DBE, ABH, are similar. In like manner, the triangles AKB, ADF, are similar; hence $AB : AH :: BD : DE$, and $AB : BK = AH :: AD = BD : DF$; consequently $DE = DF$. In like manner it may be shewn that $DF = FE$; therefore the triangle DEF is equilateral. Q.E.D.

A similar demonstration will apply when the vertices G, H, K, are turned inward.

Otherwise, by Mr. Mason, Sewalton; and, upon the same principles, by Messrs. J. Baines, Tho. Hindmarsh, and W. S. B. Woolhouse.

where $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

Here, since a, b, c are involved exactly in the same manner in DF, it is manifest that the same expression gives the values of DE and EF; consequently the triangle DEF is equilateral.

The Editor, with much regret, omitted several of the elegant demonstrations of this curious property, especially the solution and corollaries of Mr.

Página del almanaque The Ladies' Diary. Wikicommons

Matemática Española (RSME) … Real Sociedad