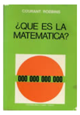

Categoría: **Sobre las matemáticas**
Autor:
Richard Courant y Herbert Robbins

Editorial:
Aguilar (Colección Ciencia y Técnica)

Año de publicación:
1979

Nº de hojas:
533

ISBN:
84-03-20032-3

(primera edición de 1941)

Reeditado por El Fondo de Cultura Económica de España 2003 (ISBN:968-16-6717-4, 622 pp.)

El título corresponde a una cita de M. Morse que elogiaba de esa forma la aparición del libro el año 1941. En la contraportada de la edición española se recogen unas palabras de A. Einstein acerca de esta obra: «Una acertada exposición de los conceptos y métodos fundamentales de la matemática. Constituye una introducción que puede leer sin dificultad el profano, en tanto que al iniciado en matemáticas le ofrece un panorama general de sus métodos y principios básicos». No son las únicas personalidades que hablan de ¿Qué es la matemática? en términos elogiosos. El *Courant/Robbins*, como se le suele nombrar coloquialmente, se ha convertido en poco tiempo en un clásico entre las obras de introducción al pensamiento y métodos de las matemáticas.

Desde su primera edición en inglés de 1941, y su traducción al castellano en 1955, ha sido un libro de éxito como lo prueban sus abundantes reediciones. En realidad, todas esas ediciones son idénticas en lo esencial y tan sólo contienen correcciones de errores menores y erratas y, hablando con propiedad, se debería decir de ellas que son reimpresiones. R. Courant, en sus últimos años de vida, quería actualizar el texto pero no llegó a hacerlo. La revisión ha llegado de la mano de Ian Stewart, pero como él reconoce, el libro ha envejecido muy bien, tanto en sus puntos de vista, la elección de los tópicos tratados, el énfasis en la resolución de problemas, como en la terminología usada, lo que ha hecho innecesario modificar el propio texto. Por ello, en esta segunda edición, sólo ha añadido comentarios y extensiones a varios capítulos de la obra original que recogen los progresos alcanzados en los últimos años y los actualizan.

Richard Courant, nació en 1888 en Lublinitz (Polonia) y se formó como matemático en las universidades de Breslau, Zurich y Gotinga. En esta última llegó a ser el sucesor de Félix Klein cuando accedió a la dirección dei prestigioso Instituto Matemático. En esta época colaboró con D. Hilbert en el libro *Métodos de la Física Matemática*, que aún hoy día sigue siendo de obligada referencia. Como a otros científicos de origen judío (Emmy Noether, Hermann Weyl, Max Born, etc.), el fascismo alemán le prohibió ejercer la docencia. Pudo emigrar a los Estados Unidos donde se incorporó a la universidad de New York, llegando a ser director del Instituto de Ciencias Matemáticas. Dentro de este ambiente es donde planeó la obra que nos ocupa, que elaboró conjuntamente con su colaborador Herbert Robbins.

En el prólogo a la primera edición, Courant se lamenta de que las matemáticas estuviesen perdiendo su lugar dentro de la formación de las personas cultas. Cuando analiza las causas, parecería que estuviésemos leyendo a un crítico actual: Parte de la responsabilidad recae en la enseñanza de las matemáticas que ha degenerado hacia el adiestramiento en técnicas de cálculo que no conducen a la comprensión de los conceptos ni ayudan a una mayor independencia intelectual. También a una investigación muy especializada, abstracta y carente de conexiones con otros campos del saber y con las aplicaciones.

Los autores, conscientes del gran valor del saber matemático, se plantean la tarea de escribir un texto que lo presente como un todo orgánico y como la base para el pensamiento y la acción científicas. Ahora bien, dicha tarea no la abordan indirectamente, desde la historia, la biografía de grandes matemáticos o la divulgación matemática. Van a enfrentarse al contenido real de las matemáticas, apuntando directamente a las metas que éstas persiguen y los motivos de sus desarrollos, de modo que sea posible vislumbrar los logros y métodos de la matemática moderna. Además, lo hacen sin caer en los excesos que un malentendido rigor impone a los textos habituales. No por ello evitan las dificultades, sino que exigen del lector una actitud atenta y un pensamiento crítico. Aunque nos gustaría que fuese así, quizá su pretensión de considerar que se presuponen tan sólo los conocimientos de la enseñanza media resulte excesivamente optimista.

La introducción de *¿Qué es la matemática?* comienza con la siguiente descripción de la actividad matemática:

"La matemática, como una expresión de la mente humana, refleja la voluntad activa, la razón contemplativa y el deseo de perfección estética. Sus elementos básicos son: lógica e intuición, análisis y construcción, generalidad y particularidad. Aunque diversas tradiciones han destacado aspectos diferentes, es únicamente el juego de estas fuerzas opuestas y la lucha por su síntesis lo que constituye la vida, la utilidad y el supremo valor de la ciencia matemático".

A lo largo de la historia el peso ha recaído en una u otra de estas fuerzas opuestas. Así, durante el gran periodo de creación que siguió a la invención de la geometría analítica y el cálculo diferencial e integral, los razonamientos lógicamente rigurosos, la formulación axiomática, etc. cedieron el paso a las conjeturas intuitivas y a los razonamientos convincentes. Fruto de ello fue un cúmulo de hallazgos impresionante. La necesidad de consolidar los hallazgos y de facilitar la educación matemática superior, llevó a revisar los fundamentos y a cargar el peso sobre los aspectos lógicos y la axiomática. En la época en la que se escribe el libro está en pleno auge esta inclinación hacia la pureza lógica y la abstracción. La separación entre la matemática pura y las aplicaciones y en particular el excesivo predominio del carácter axiomático-deductivo de las matemáticas es un tema que preocupo profundamente a los autores:

Una amenaza seria para la vida de la ciencia aparece contenida en la afirmación de que la matemática no es más que un sistema de conclusiones derivadas de definiciones y postulados que deben ser compatibles, pero que, por lo demás, pueden ser creación de la libre voluntad del matemático. Si esta descripción fuera exacta, las matemáticas no podrían interesar a ninguna persona inteligente. Sería un juego de definiciones, reglas y silogismos, sin meta ni motivo alguno.

Claro está que de lo que abominan es de esas matemáticas puras que exploran las consecuencias lógicos de conjuntos de axiomas más o menos arbitrarios, de pequeñas modificaciones de un conjunto de axiomas, de la generalización, especialización y abstracción sin sentido. Ahora bien, son plenamente conscientes de que el enfoque logicista y la abstracción han permitido una comprensión más profunda de los hechos matemáticos y una mayor penetración en los resultados, de que muchas de las dificultades básicas desaparecen cuando se abandona el prejuicio metafísico de que los conceptos matemáticos deban ser descripciones de una realidad esencial.

Se encuentran a lo largo del libro numerosos ejemplos en los que queda reflejada esta posición filosófica. Así, después de haber expuesto la definición del número irracional como encaje de intervalos encajados, reflexionan sobre la pertinencia de dicha definición y encuentran la justificación en el hecho de ser razonable desde el punto de vista intuitivo, ya que corresponde a la abstracción del proceso físico de determinación de una cantidad mediante sucesivas aproximaciones. También está justificada por su utilidad para construir el sistema numérico de forma consistente. El proceso que lleva a esta definición pasa por un acercamiento más intuitivo a través de las expresiones decimales indefinidas, definición que no encuentran plenamente satisfactoria ya que depende de la base de numeración elegida. La búsqueda de una definición más general e independiente de la base de numeración decimal es lo que conduce a las sucesiones de intervalos encajados. Se empieza en la intuición, pero se termina en el rigor lógico:

Prescindir del ingenuo punto de vista "realista", que considera los objetos matemáticos como cosas en sí de las cuales pretendemos modestamente determinar las propiedades, y, en cambio, comprobar que el único modo de existir de los objetos matemáticos que nos importa reside en sus propiedades matemáticas y en las relaciones que los ligan. Estas propiedades y relaciones agotan todos los aspectos posibles bajo los cuales puede intervenir un objeto en el mundo de la actividad matemática.

Richard Courant

Para los números irracionales definidos con sucesiones de intervalos encajados es posible extender las operaciones numéricas, la relación de orden, etc. de manera que las leyes que cumplían los números racionales se sigan cumpliendo. Sin embargo, los autores que valoran sumamente este proceso que conduce a una construcción rigurosa del sistema de números reales, piensan que empezar con la definición abstracta y la demostración rutinaria, aunque sencilla, de las propiedades del sistema numérico no aporta gran cosa al estudiante. Lo importante es asentar bien las intuiciones que permiten avanzar como si se partiese de un concepto ingenuo de número irracional.

Los diferentes capítulos y apartados del libro tienen una estructura similar. Evitan en todo momento hacer una exposición fría de los contenidos matemáticos, tal como puede verse en los libros de texto al uso. El punto de partida siempre es un problema. A través de su análisis y de la búsqueda de soluciones se llega a la formulación precisa de definiciones o a los procedimientos generales de resolución. Además, los autores hacen siempre referencia a los matemáticos que históricamente se enfrentaron a la situación y la resolvieron, reconociendo el mérito del descubrimiento a quien le corresponde. Una vez que han establecido el concepto con toda precisión formal, analizan diversos ejemplos con lo que pretenden ahondar en la teoría, en sus logros y en las dificultades a las que debe enfrentarse. En todo este proceso no evitan las dificultades, aunque hagan pequeñas concesiones con algunos detalles técnicos. La exposición tiene siempre un carácter claramente didáctico, resaltando los puntos claves de las demostraciones y exponiendo con claridad y sencillez cada paso que dan. Por último, siempre que la situación lo permite reflexionan sobre los métodos empleados y sus limitaciones.

Un ejemplo significativo se puede encontrar casi al principio del libro en el epígrafe dedicado al principio de inducción matemática. La infinitud del conjunto de los números enteros positivos conduce a la presentación de la inducción matemática en contraposición con la inducción empírica. Analizan dos ejemplos de tipo geométrico (número de partes en que se divide el plano mediante varias rectas y suma de los ángulos de un polígono convexo) para extraer lo esencial de los argumentos que establecen los teoremas generales. Ello les conduce a la formulación precisa del principio de inducción. Siguen con una reflexión sobre la necesidad del uso de la inducción matemática como procedimiento de demostración en las matemáticas superiores. Después de exponer con brillantez diversos ejemplos de aplicación del principio de inducción (progresiones aritméticas y geométricas, suma de cuadrados, la desigualdad y el binomio de Newton) terminan el apartado con una reflexión importante: la inducción matemática permite probar una fórmula una vez es conocida, pero no da ningún tipo de indicación sobre cómo dicha fórmula puede encontrarse. Es crucial la formulación de algún tipo de hipótesis y para ello el papel del ensayo, las analogías, la intuición e incluso la inducción empírica tienen un papel importante, hasta el punto que:

En tanto que una demostración no proporcione una indicación para el acto del descubrimiento, debe llamarse más propiamente una *comprobación*.

El primer capítulo del libro está dedicado a los números enteros. Éstos son una creación de la mente humana, que permite contar los elementos de un conjunto, al perder toda relación con los objetos contados son el punto de partida para la construcción del edificio de las matemáticas. Un breve repaso de las propiedades de los números naturales inicia la aritmética. En ella es fundamental la representación decimal de los números y el concepto de base de numeración, uno de los mejores ejemplos de adelanto científico que ha facilitado enormemente la vida cotidiana. El capítulo se completa con el estudio del principio de inducción matemática, que se ha citado antes. Termina con un amplio suplemento sobre la teoría de números en el que se tratan los siguientes temas: Los números primos y su infinitud, la descomposición factorial en producto de primos, la distribución y densidad de los números primos, la conjetura de Goldbach y los pares de primos gemelos. También, el estudio de las congruencias, las ternas pitagóricas y el último teorema de Fermat, el algoritmo de Euclides y el teorema fundamental de la aritmética, y una breve mención a las ecuaciones diofánticas y a las fracciones continuas.

Vamos a ver como, dentro del estudio de los números primos, introducen un importante teorema. Cabe destacar varios aspectos del estilo expositivo de los autores que son comunes a las diferentes partes del libro: el reclamo a la experiencia para justificar lo pertinente del resultado que se estudia, la mención a una demostración clásica y la descripción de cómo será la demostración que se va a exponer antes de acometerla con todo su rigor. El lector que desee saltarse la demostración formal, o tenga dificultades en comprenderla, habrá captado la esencia, la forma empleada para establecer el resultado:

Si un número ha sido expresado como producto de números primos, podemos disponer dichos factores primos en un orden cualquiera. La experiencia demostraría que, salvo la arbitrariedad en la ordenación, la descomposición de un número N en factores primos es única: *Todo entero N, mayor que 1, puede descomponerse en producto de números primos, y solamente de una forma*. Esta proposición parece a simple vista tan evidente que un profano podría inclinarse a admitirla sin prueba. Sin embargo, no es una trivialidad y la demostración, aunque elemental, requiere algunos razonamientos sutiles. La demostración clásica, dado por Euclides, de este "teorema fundamental de la aritmética" está basada en un método o "algoritmo" para el cálculo del máximo común divisor de dos números. (...) En vez de dicha demostración, daremos aquí otra de cosecha más reciente: más breve, pero quizá más artificiosa que la de Euclides. Será un ejemplo típico de demostración indirecta. Supondremos la existencia de un entero susceptible de dos descomposiciones esencialmente diferentes, y de esta hipótesis resultará una contradicción. Esta contradicción demostrará que la hipótesis de que existe un entero con dos descomposiciones esencialmente diferentes en factores primos es absurda, y como consecuencia, resultará que lo descomposición en factores primos de un entero cualquiera es única.

El segundo capítulo está dedicado a los sistemas numéricos, es decir a la exposición del proceso por el que se establecen los distintos campos numéricos sobre una base lógica rigurosa. Se trata de una exposición bastante clásica, pero siempre guiada por una intención que es llevar al lector al convencimiento de que no se trata de un juego puramente formal, sino que las decisiones tomadas al definir están guiadas por la necesidad de crear un instrumento útil desde el punto de vista práctico, así como por la exigencia de que las sucesivos ampliaciones conserven las propiedades aritméticas de las operaciones del sistema numérico que se ha ampliado. Destaca dentro de este capítulo, por la claridad y profundidad en la exposición, el apartado dedicado a la introducción de los números irracionales. También el cuidado de presentar las relaciones con otras partes de la matemática. Por ejemplo, una vez se ha establecido el continuo numérico, y se han presentado su interpretación geométrica, dedican un apartado a la geometría analítica, y esto está bien justificado ya que es precisamente la relación entre números reales y longitudes de segmentos sobre la recto la que permite referir todos los objetos y operaciones geométricas a los números.

Otros de los temas que complementan este segundo capítulo es el análisis del concepto matemático de infinitud, en el que introduce la teoría de conjuntos de Cantor, los cardinales y la hipótesis del continuo. También reflexionan sobre el método de demostración indirecta y sus limitaciones, las paradojas de la teoría de conjuntos y los fundamentos de las matemáticas. Otros temas, que no suelen ser habituales en las exposiciones elementales de las ampliaciones del concepto numérico y hablan elocuentemente de la profundidad de este libro, son la exposición del teorema fundamental del álgebra o la distinción entre números algebraicos y trascendentes incluyéndose la demostración de Liouville de la existencia de números trascendentes.

El suplemento de este capítulo está dedicado a exponer el álgebra de conjuntos, y una breve mención a sus aplicaciones a la lógica matemática y a la teoría de las probabilidades.

El siguiente capítulo trata de las construcciones geométricas. En la primera parte se analizan, desde el punto de vista algebraico, las construcciones con regla y compás. Todo problema de construcción lleva a plantear una ecuación en la que la incógnita es el segmento que se debe construir. Pero lo que resulta decisivo es la caracterización de los números que pueden construirse. El uso de la regla sólo permite construir todas las cantidades resultado de sumar, restar, multiplicar o dividir los datos. Ahora bien, con el uso del compás es posible salir del cuerpo al que pertenecen los datos, por ejemplo, escogiendo una cantidad k de dicho cuerpo y formando los números de la forma a + bk donde a y b son del cuerpo inicial. Estas nuevas cantidades pertenecen a una ampliación del cuerpo inicial cuyos elementos son a su vez construibles. Este proceso evidentemente se puede iterar de forma que un número es construible si se puede establecer una sucesión de ampliaciones de forma que el número esté en uno de esos cuerpos ampliados. La caracterización positiva de los números construibles con regla y compás permite abordar, como consecuencia, los problemas clásicos de construcción de los griegos y así establecer la irresolubilidad de la duplicación del cubo, la trisección del ángulo o la construcción del heptágono regular. El problema de la cuadratura del círculo exige disponer de técnicas para demostrar que n es un número trascendente, y por tanto no construible.

La segunda parte del capítulo está dedicada a estudiar otros procedimientos de construcción: las transformaciones geométricas y en particular la inversión; las construcciones con sólo un compás y el teorema general de Mascheroni; las curvas mecánicas y sus aplicaciones a la construcción de conexiones. Por último se aplican las inversiones a la resolución geométrica del problema de Apolonio (hallar un círculo tangente a tres círculos dados).

El cuarto capítulo comienza con la clasificación de las propiedades geométricas de acuerdo con su invarianza respecto de determinados grupos de transformaciones, según la idea introducida por F. Klein. Rápidamente se pasa a las transformaciones proyectivas y al estudio de la geometría asociada. El concepto de razón doble y su invarianza mediante proyecciones es el punto de partida, pero donde de nuevo observaremos el interés didáctico de los autores es en su introducción de los puntos y recta del infinito. Así, su explicación de cómo sus propiedades se eligen de forma que las leyes de incidencia entre puntos y rectas sigan cumpliéndose en el espacio ampliado. Con ello se consigue evitar los casos anómalos de las demostraciones provocados por las proyecciones paralelas y por tanto, simplificarlas. Todo ello se completan con la demostración de los teoremas clásicos de la geometría proyectiva: teoremas de Desargues, Pascal y Brianchon, así como el tratamiento proyectivo de las cónicas y cuádricas.

El capítulo termina con una incursión en la axiomática de la geometría y en particular la aparición de las geometrías no euclídeas. El conjunto de axiomas dan una definición implícita de los objetos y términos básicos de la geometría (punto, recta, incidencia,...). Todos los axiomas euclídeos son aserciones físicamente verificables sobre objetos, excepto el axioma de las paralelas ya que se refiere a toda la extensión de la recta que imaginamos como indefinida. La duda sobre su independencia o no, respecto de los demás axiomas, lleva a la construcción de geometrías que no lo verifican. Los autores exponen de forma sencilla los modelos de Klein, Poincaré o Riemann como ejemplos de geometrías que incumplen el axioma de las paralelas y están exentos de contradicción.

Dentro de la perspectiva iniciada en el capítulo cuarto, el siguiente lo dedican al estudio de las propiedades de las figuras que subsisten cuando se las somete a deformaciones que les hagan perder todas sus propiedades métricas y proyectivas: las propiedades topológicas. La primera que estudian es la fórmula de Euler. Una demostración hecha para poliedros demuestra seguir siendo válida cuando sus aristas y caras se deforman sin producir fracturas. Estas consideraciones llevan a la definición precisa de las transformaciones topológicas. El resto del capítulo está dedicado a presentar diversas propiedades topológicas: la conexión, el teorema de la curva de Jordan, el problema de los cuatro colores y la demostración del teorema de los cinco colores, el concepto de dimensión topológica, el teorema del punto fijo de Brower, la clasificación topológica de las superficies o el teorema fundamental del álgebra. Todos ellos están expuestos con rigor y de forma clara e intuitiva.

Los tres últimos capítulos del libro tratan de lo que llamaríamos análisis matemático. El sexto capítulo está completamente dedicado a la discusión de dos conceptos claves: continuidad y límite. Lo más interesante del mismo lo podemos encontrar, además de en la clara exposición de los conceptos, en la discusión sobre las dificultades que bloquearon el camino hasta la comprensión clara y la definición precisa de los mismos. Así, por ejemplo, respecto del límite de una función en un punto, resaltan la dificultad de expresar como «aproximar» la variable x a un valor x0 recorriendo todos los valores del intervalo de definición. El mérito de la definición de Cauchy está en alejarse hasta un punto de vista estático, que no presupone ninguna intuición de movimiento, sino tan sólo la reducción a algo observable: la existencia de un entorno de x0 en el que la función alcanza valores dentro del entorno del límite prefijado, cualquiera que sea éste. Conscientes de las dificultades para la compresión de estas definiciones, llegan a afirmar que:

No es de extrañar que cuando se encuentra por primera vez [la definición de límite de una sucesión) no sea posible captarla inmediatamente en toda su profundidad. Algunos autores adoptan una actitud poco feliz, presentando esta definición al lector sin una preparación adecuada, como si dar una explicación no resultara honroso para la dignidad de un matemático.

La exposición de los conceptos se completa con unas cuantos teoremas sobre sucesiones y funciones continuas (teoremas de Bolzano y de Weierstrass), además de algunas aplicaciones. Por cierto que en una de las aplicaciones del teorema de Bolzano que se exponen en este artículo existe un error, el único a lo largo del libro, que ha sido detectado y explicado en el capítulo añadido en la segunda edición por I.Stewart (véanse pp. 505 a507).

El capítulo séptimo está dedicado al estudio de un tipo de problemas: aquellos que tienen una formulación en términos de lo «óptimo» y lo «peor», es decir la teoría de los valores extremos. Se dan múltiples ejemplos que permiten exponer la importancia que para el estudio de las leyes físicas tiene el principio del mínimo, que proporciona una solución general a una gran cantidad de problemas particulares. Se introducen junto a los problemas de máximos y mínimos que estuvieron en el origen del cálculo diferencial, el cálculo de variaciones o la teoría de los valores estacionarios, todo ello desde un punto vista completamente elemental. La parte final del capítulo aborda la solución experimental de problemas de mínimo con experimentos con películas jabonosas, en las que presentan resultados propios sobre las superficies mínimas que adopta la solución jabonosa cuando el contorno es una estructura de alambre flexible y el efecto de las deformaciones del contorno sobre la película.

El último capítulo da una introducción elemental del cálculo infinitesimal insistiendo en la comprensión de los conceptos de integral y derivada más que en su manipulación formal que puede vaciar de sentido los contenidos de la teoría. El uso de un lenguaje intuitivo no es óbice para presentar los conceptos con claridad y precisión. Cabe destacar que contra las costumbres al uso se introduce primero la integral y luego la derivada, justificado por su aparición histórica. Se resalta sobre todo que la relación entre ambos conceptos permitió el gran desarrollo de las matemáticas a partir del siglo XVII.

En la segunda edición, Ian Stewart, acomete la puesta al día de la obra de Courant y Robbins. El capítulo titulado «Desarrollos recientes», contiene los comentarios que actualizan los temas tratados en ¿Qué es la matemática?, sin introducir otros nuevos tópicos de los que han adquirido relevancia en la última parte del siglo, ya que sobre ellos puede encontrarse una abundante bibliografía reciente entre la que cabría destacar las obras del propio I.Stewart. Además del comentario al error encontrado en la obra original, no podía faltar entre otros las demostraciones recientes del teorema de los cuatro colores y del último teorema de Fermat.

¿Qué es la matemática? cayó por primera vez en mis manos en los últimos años de la carrera, cuando buscaba lecturas que dieran sentido a las materias que se me explicaban desde el más duro estilo axiomático. Me interesaba tener una visión de conjunto de los métodos y temas de las matemáticas, entender el porqué de las definiciones abstractas y el

hacia dónde iban los desarrollos formales. Creo que entonces, y aún ahora, el libro cumplía a la perfección con estos objetivos. Es una pena que desde hace años no haya vuelto a reeditarse en nuestro país y que la aparición de esta segunda edición revisada en inglés debería animar a la editorial a volver a imprimirlo.

Como apostilla I. Stewart en su prólogo, estamos ante una obra única.

(Reseña aparecida en la revista SUMA no. 29, 1998)

- **Materias:** educación, análisis, inducción matemática, números, aritmética, teoría de números, números primos, números reales, infinito, números algebraicos, trascendentes, geometría, pro
- **Autor de la reseña:** Julio Sancho