El Teorema de Pitágoras en *Los Elementos* de Euclides

Pitágoras y Euclides. Fragmento de *Las Artes Liberales* de 1355. Biblioteca Ambrosiana de Milán.

CITAS MEMORABLES SOBRE EL *TEOREMA DE PITÁGORAS* EN *LOS ELEMENTOS* DE EUCLIDES

- *Mientras admiro a los que han observado la verdad de este teorema, ensalzo más todavía al autor de Los Elementos, no sólo porque consiguió una demostración mucho más lúcida, sino también porque obtuvo un teorema mucho más general, mediante los irrefutables argumentos del Libro* VI [Euclides, VI.31].

Proclo. *Comentarios al Libro I de los Elementos de Euclides*. (Comentario a la Proposición XLVII)

- *Hasta los 40 años* [Hobbes] *no se interesó por la Geometría, hecho que ocurrió por accidente al hojear casualmente en una biblioteca un libro de Los Elementos de Euclides, abierto por la Proposición* I.47.

De la vida de T.Hobbes en *Brief Lives* de J.Aubrey, 1694.

- *Antes de que la Santa Geometría cayera en mis manos, un tío mío me había contado, a los 12 años, el Teorema de Pitágoras.* [...] *Es maravilloso que un hombre como Euclides sea capaz de alcanzar tal grado de certeza y pureza haciendo uso exclusivo de su pensamiento.*

Sketch autobiográfico sobre A.Einstein. Philosopher-Scientist. P.A.Schilpp, 1951.

- *En la demostración de Euclides del Teorema de Pitágoras están mezcladas de tal modo la intuición y la lógica, que cada paso lógico está evidenciado intuitivamente.*

F.Klein. *Matemática elemental desde un punto de vista superior*. Vol. II. *Geometría*. Biblioteca Matemática. Dtor: J.Rey Pastor. Madrid, 1931. p.319.

- *Cientos de pruebas ha sugerido la proposición pitagórica. [...] Una de las primeras es la de Los Elementos de Euclides que ha soportado la prueba del tiempo mejor que cualquier otra.*

D.Smith. History of Mathematics. Dover. New York, 1958. Vol.2, p.289.

- *Gran parte de lo que precede en Los Elementos de Euclides* [a la Proposición I.47] *apun taba al gran Teorema de Pitágoras, que sirve de adecuado clímax al Libro*
I. [...]
La sutileza de la demostración de Euclides es un ejemplo de la mejor Geometría.

W.Dunham. *Viaje a través de los genios.* Pirámide, Madrid, 1992. p.76.

El llamado *Teorema de Pitágoras* en la Proposición I.47 de *Los Elementos* de Euclides

El primer Libro I de *Los Elementos* de Euclides termina con el teorema más importantes de la Geometría elemental: El *Teorema de Pitágoras* y su recíproco (las Proposiciones I.47 y I.48), donde alcanza una verdadera apoteosis geométrica la forma magistral y sumamente bella con que el maestro alejandrino realiza la proeza de demostrar el legendario teorema, con una lógica impecable, una inusitada elegancia y una modesta economía de elementos geométricos construidos de forma muy cuidadosa en las proposiciones anteriores.
Euclides enuncia el Teorema de Pitágoras en la forma siguiente (*Euclides: Elementos*. traduc. y notas de M.L.Puertas. Gredos. Madrid, 1996. Libro I, p.260):

Proposición I.47. ***En los triángulos rectángulos el cuadrado del lado que subtiende el ángulo recto es equivalente a los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo recto*** **.**

Al no poder utilizar las proporciones en forma pitagórica –por la presencia inexorable de las magnitudes inconmensurables– que suponen la aplicación de la semejanza –que no aparecerá en *Los Elementos* hasta el Libro VI–, Euclides agudiza el ingenio y obtiene el magnífico resultado aplicando para su demostración, además de algún que otro postulado y axioma, elementos muy simples de Geometría elemental, estudiados previamente. Entre ellos:

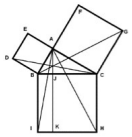
- La construcción de cuadrados sobre segmentos (I.46).
- Ángulos adyacentes que suman dos rectos (I.14).
- El primer teorema de congruencia de triángulos (I.4).
- La relación entre triángulos y paralelogramos que tienen la misma base y situados entre las mismas paralelas (I.36, I.41).

«*Los paralelogramos que tienen la misma base y están situados entre las mismas paralelas tiene el mismo área* » (*Euclides* I.36).

«*Si un paralelogramo tiene la misma base que un triángulo y están situados entre las mismas paralelas el área del paralelogramo es doble de la del triángulo* » (*Euclides* I.41).

Parece que Euclides está ansioso de situar lo más pronto posible, de la manera más rápida y directa, el *Teorema de Pitágoras* en *Los Elementos*, ante la perentoria necesidad de utilizarlo ulteriormente con asiduidad; pero ante la imposibilidad de aplicar de forma tan temprana la *Teoría de la Proporción*

de Eudoxo –que será desarrollada en los Libros V y VI de
Los Elementos
–, con base en las proposiciones descritas (I.36, I.41), realiza, con una estética inefable y con una sutileza sublime, la siguiente demostración:

- 

Los triángulos DCB y ABI son iguales ya que AB=BD, BI=BC y el ángulo B del triángulo DCB es igual al ángulo B del triángulo ABI.

- El área del cuadrado ABDE es doble del área del triángulo DCB ya que tienen la misma base y están situados entre las mismas paralelas.
- El área del rectángulo BIKJ es doble del área del triángulo ABI ya que tienen la misma base y están situados entre las mismas paralelas.

Combinando los tres resultados anteriores, resulta que el área del rectángulo BIKJ es igual al área del cuadrado ABDE.

Razonando de forma análoga se demuestra que el área del rectángulo CHKJ es igual al área del cuadrado ACGF.
Luego, ya que el área del cuadrado BIHC es igual a la suma de las áreas de los rectángulos BIKJ y CHKJ, definitivamente, el área del cuadrado cuyo lado subtiende el ángulo recto, BIHC, es igual a la suma de las áreas de los cuadrados, ABDE y ACG, cuyos lados comprenden el ángulo recto.

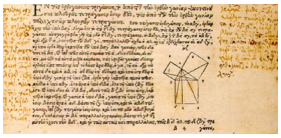
La demostración euclídea del *Teorema de Pitágoras* es de naturaleza estrictamente geométrica. En ella juega un papel fundamental una figura que procede de una secuencia de construcciones que, mediante ciertas congruencias de triángulos, va transformando los cuadrados sobre los catetos en dos rectángulos que al encajarse componen el cuadrado sobre la hipotenusa. La figura euclídea se ha hecho famosa por las curiosas calificaciones que se le han dado. E. Lucas en *Recréations mathématiques*
dice que los árabes le llamaban «
silla de la novia
», porque se parece a la silla que en algunos países orientales llevaba un esclavo a la espalda para transportar a la novia hasta la ceremonia. También se ha llamado «
calesa de la mujer recién casada
» (Bhaskara), «

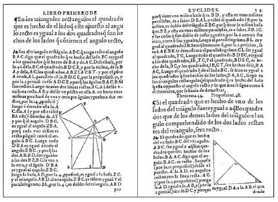
capucha de franciscano
», «
cola de pavo real
», «
figura del molino de viento
». El filósofo Schopenhauer, que muy impresionado por el hecho del teorema, siempre se preguntó por la razón natural de la relación pitagórica, llamaba a la demostración de Euclides «
una prueba paseando en zancos
» y también «
prueba de la ratonera
».

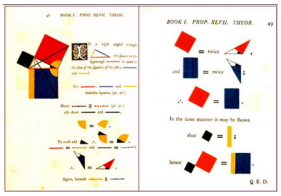
ILUSTRACIONES HISTÓRICAS DEL *TEOREMA DE PITÁGORAS* EN EUCLIDES

Fragmentos de la Proposición I.47 de *Los Elementos* de Euclides en versiones históricas.
1: Manuscrito griego (siglo XII, Biblioteca Nacional de París). 2: Manuscrito chino (siglo XVII). 3: Manusc
Los Elementos de Euclides es, sin duda alguna, el libro científico más traducido y divulgado *Biali*

Fragmentos de la Proposición I.47 de *Los Elementos* de Euclides en versiones impresas.
1. Primera impresión (Ratdolt, Venecia, 1482). Biblioteca del Monasterio de San Millán de Yuso.
2. Editio princeps de *Los Elementos* de Euclides (S.Grynaeus *el viejo*



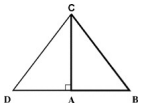
El  *Teorema de Pitágoras* y su inverso –Proposiciones I.47 y I.48 de *Los Elementos* de E



El *Teorema de Pitágoras* (I.47) en la edición de D. Byrne (1847) de *Los Elementos* de Eu

El recíproco del *Teorema de Pitágoras* en la Proposición I.48 de *Los Elementos* de Euclides

La Proposición I.47 marca la cumbre del Libro I de *Los Elementos*, pero la sagacidad de Euclides va todavía más allá, exhibiendo una demostración del resultado inverso del *Teorema de Pitágoras* que es un increíble modelo de economía de recursos en Geometría, en la Proposición I.48 (*Euclides: Elementos*. Gredos. Madrid, 1996. Libro I, p.263):



«*Si en un triángulo el cuadrado construido sobre uno de los lados es igual a la suma de los cuadrados construidos sobre los restantes lados del triángulo, el ángulo comprendido por estos dos lados es recto* ».

En la demostración Euclides traza un segmento AD=AB y perpendicular a AC. De la hipótesis: $AB^2 + AC^2 = BC^2$, y al ser rectángulo el triángulo ADC, resulta:
$AD^2 + AC^2 = DC^2$ (I.47, *Teorema de Pitágoras*).
Pero como AB=AD, será:
$BC^2 = AB^2 + AC^2 = AD^2 + AC^2 = DC^2$,
por tanto: BC=DC; de manera que los triángulos DAC y CAB son congruentes, ya que al ser el

lado AC común, los dos triángulos tienen los tres lados iguales.
Por tanto, el ángulo CAB que es igual al CAD (*Euclides* I.8), debe ser recto.

Dos notas son dignas de ser remarcadas sobre esta demostración: su concisión y el hecho de gran valor lógico-deductivo de que Euclides aplica el propio *Teorema de Pitágoras* para demostrar su recíproco.

Por desgracia esta sencilla demostración es obviada en los libros de texto aunque paradójicamente es utilizada implícitamente tanto como el propio *Teorema de Pitágoras* y ello desde los antiguos agrimensores egipcios. En efecto, es curioso que mientras cualquier persona se enfrenta al
Teorema de Pitágoras
en su etapa escolar, muy pocas personas conocen la demostración del teorema inverso, aunque están seguros de su legitimidad y de hecho lo aplican cuando es necesario.

Las dos proposiciones, I.47 y I.48 constituyen una unidad secuencial, con la que se alcanza un clímax de esplendor geométrico en el final del Libro I de *Los Elementos*, ya que tomadas en conjunto caracterizan por completo los triángulos rectángulos, es decir:

«*Un triángulo es rectángulo si y sólo si el cuadrado sobre la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados sobre los catetos* ».

He aquí otro relevante rasgo del alto valor pedagógico de *Los Elementos* de Euclides.

El inverso del *Teorema de Pitágoras* (Proposición I.48) en la edición de visual de O.Byrne de *Los Elementos*

En la Introducción general de la edición de Gredos de *Los Elementos* de Euclides (Libro I,

pp.66–67), así como en el capítulo 4.2.4 de su obra
La Trama de la Demostración
(Alianza Editorial. Madrid, 1990, p.321), Luís Vega escribe:

«*El carácter elemental de* I.47 y I.48 *convierte ambos teoremas en un broche de oro del Libro* I *desde un punto de vista disciplinario; son una viva muestra de la capacidad de Euclides para dominar por medios relativamente sencillos buena parte de la tradición geométrica antigua.*
[…].
La prueba de esta versión, a todas luces propia de Euclides, discurre al margen de la teoría de la proporción y del recurso a la semejanza de triángulos
[…]
lo que contribuye a hacer significativa la opción de Euclides en el contexto del Libro
I,
por un desarrollo inicial y sistemático en los términos elementales de la aplicación y transformación de áreas.
[…].
Revela, además, la capacidad de Euclides para reconstruir de modo sistemático un legado antiguo y forjar nuevas pruebas que se adecuen a esta reconstrucción
».

Bibliografía

1. ARTMANN,B.: *Euclid–The Creation of Mathematics*. Springer, New York, 1996. Cap. 4.6.
2. BOYER,C.: *Historia de las Matemáticas.* Alianza Universidad Textos, Madrid, 1986. Cap. VII.5.
3. BUNT,L.: *The Historical roots of elementary Mathematics*. Dover, New York, 1988. Cap. 6.11.
4. DEDRON,P ; ITARD,I.: *Mathématiques et Mathématiciens.* Magnard, París, 1959. Cap.15.
5. DEDRON,P: ITARD,J.: *Mathematics and Mathematiciens*. Open University, London,

1973. Vol.2, cap.5.

6. DHOMBRES, J.: *Mathématiques au fil des âges*. Gauthiers-Villars, París, 1990. Cap. 6.1.

7. DUNHAM,W.: *Viaje a través de los genios*. Ed. Pirámide, Madrid, 1992. Cap.2.

8. EVES,H.: *Great Moments in Mathematics*. The mathematical association. of America, 1977. Vol. 1, cap. 4.

9. EVES,H.: *An Introduction to the History of Mathematics*. CBS Coll. Publishing, New York, 1983. Cap. 5.3.

10. GONZÁLEZ URBANEJA,P.M.: *Matemáticas y matemáticos en el mundo griego* (en *El legado de las Matemáticas: de Euclides a Newton*). pp.24-75.Universidad de Sevilla, 2000. Cap.1.

11. GONZALEZ URBANEJA,P.M.: *Pitágoras, el filósofo del número*. Nivola, Madrid, 2001. Cap.4.

12. HEAT, T.L.: *A History of Greek Mathematics*. Dover, New York, 1981. Vol.1. Caps. V.b, XI.9.1.

13. HEILBRON, J.L. *Geometry Civilized*. Clarendon Press, 1988. Cap.4.1.

14. KLEIN,F.: *Matemática elemental desde un punto de vista superior*. Vol. II. *Geometría*. Biblioteca Matemática. Dtor: J.Rey Pastor. Madrid, 1931. Apéndice IV.b.

15. KLINE, M.: *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*. Alianza Editorial, Madrid, 1992. Vol.1.Cap. 4.4.

16. LOOMIS, E.S.: *The Pythagorean Proposition. Its Demostrations Analyzed and Classified* . National Council of Teachers of Mathematics (« *Classics in Mathematics Education* »). Washington, 1968. Cap. II.A.(b).

17. MARTÍNEZ,A.: *Teorema de Pitágoras: originalidad de las demostraciones de E. García Quijano* . La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, Vol.3, nº 2, pp. 277–296, 05–08/2000.

18. PEDOE, D *La Geometría en el Arte*. Gustavo Gili, Barcelona, 1979. Cap.VI.

19. PÉREZ,M.: *Una historia de las Matemáticas*. Visión Net. Madrid, 2004. Cap.5.3.

20. PROCLUS DE LYCIE: *Les Comentaires sur le premier livre des Éléments d'Euclide*. Introd. et notes de P.Ver Eecke. Desclée de Brouwer, Bruges, 1948. Commentaire sur le Proposition XLVII.

21. REGHINI,A.: *Per la restituzione della Geometria Pitagorica*. Editrice "Atanor". Roma. Cap. 3.7.

22. SMITH,D.: History of Mathematics. Dover. New York, 1958. Vol.2, Cap.V.5.

23. VEGA REÑÓN,L.: La Trama de la Demostración. Alianza Editorial. Madrid, 1990. Caps. 4.2.1, 4.2.4.

Ediciones de *Los Elementos* de Euclides.

1. ENRIQUES,F.: *Los Elementos de Euclides y la crítica antigua y moderna*. Instituto Jorge Juan. CSIC, Madrid. 1954. Libro I.

2. EUCLIDES: *Elementos*. Traducción y notas de M.L.Puertas. Gredos. Madrid, 1996. Libro I.
3. EUCLIDES: *Los seis primeros libros de Los Elementos*. Traducción de Rodrigo Çamorano. Casa de Alonso de la Barrera. Sevilla, 1576. Nueva edición de 1999, Ediciones Universidad de Salamanca. Libro I.

4. HEAT,T.L.: *The thirteen books of The Elements*. 3 Vols. Dover. New York, 1956. Book I.

5. VERA,F.: *Los Elementos de Euclides* (en *Científicos griegos*). Aguilar, Madrid, 1970. Libro I.

Algunas páginas de Internet sobre las Proposiciones I.47, I.48 de *Los Elementos* de Euclides.

1. Joyce, D.E.: *Euclid's Elements on the Web* . Book I . Proposition I.47 . Proposition I.48
2. Doménech, J.: *Elements d'Euclides en Català* . . Proposició I.47 . Proposició I.48
3. Doménech,J.: *Elementos de Euclides en Español* . Libro I . Proposición I.47 . Proposició I.48

4. Weisstein, E.: *Pythagorean Theorem* . Wolfram Research.
5. Morely,J.: *Euclid' proof of Pythagoras' Theorem*