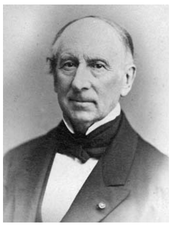
Función derivada de una función



Augustin-Louis Cauchy nació en París el 21 de agosto de 1789 y murió el 23 de mayo de 1857 en Sceaux (Francia).
En 1805 ingresó en la Escuela Politécnica de París y en 1807 lo hizo en la École des Ponts et Chaussées donde estudió ingeniería civil.
En 1816 ganó el Gran Premio de la Academia Francesa de Ciencias.
Escribió 789 memorias de carácter científico.

Las contribuciones de Cauchy a las Matemáticas se refieren a la convergencia-divergencia de series infinitas, funciones reales y complejas, ecuaciones diferenciales, determinantes, probabilidad y física matemática.

Los conceptos de límite y continuidad que aparecen en nuestros textos de Análisis se deben a Cauchy.

Entre sus obras destacan el *Cours d'analyse* (1821),destinado a los alumnos de la Escuela Politécnica, *Leçons sur le Calcul Différentiel* (1829) y *Exercises d'analyse et de physique mathématique* (1840-1847).

Cauchy era partidario de los Borbones y después de la revolución de 1830 tuvo que abandonar París. Tras un corto tiempo en Suiza aceptó una oferta para ocupar una cátedra en Turín donde estuvo hasta 1832. En 1833 pasó de Turín a Praga donde fue tutor del nieto de Carlos X.

Cauchy volvió a París en 1838 donde no pudo ejercer la docencia por negarse a prestar el juramento de lealtad. Cuando Luis Felipe fue destronado en 1848 Cauchy se incorporó a su cátedra en la Escuela Politécnica sin necesidad de prestar el juramento de lealtad al nuevo gobierno.

Cauchy fue un católico ferviente. Sus últimas palabras, dirigidas al Arzobispo de París, fueron: *Los hombres desaparecen, pero sus obras perduran.*

Del tomo primero de su *Résumé des Leçons données a l'École Royale Polytechnique, sur le Calcul Infinitésimal* (1823) hemos seleccionado la Tercera Lección consagrada a las derivadas de las funciones de una variable.

RÉSUMÉ DES LEÇONS
DONNÉES
A L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE,
SUR
LE CALCUL INFINITÉSIMAL,
PAR M. AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY,
Ingénieur des Ponts-et-Chaussées, Professeur d'Analyse à l'École royale Polytechnique,
Membre de l'Académie des Sciences, Chevalier de la Légion d'honneur.

TOME PREMIER.

A PARIS,
DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

Chez DEBURE, frères, Libraires du Roi et de la Bibliothèque du Roi, rue Serpente, n.° 7.

1823.

TERCERA LECCIÓN
Derivadas de las funciones de una variable

Cuando la función y = f(x) es continua entre dos límites dados de la variable x, y se asigna a esta variable un valor comprendido entre dichos límites, un incremento infinitamente pequeño de la variable produce un incremento infinitamente pequeño de la función. Por consiguiente, si Δx = i, entonces los dos términos de la "razón entre las diferencias"

(1) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$

serán dos cantidades infinitamente pequeñas. Sin embargo, mientras estos dos términos se aproximan indefinidamente y simultáneamente al límite cero, la razón podrá converger a otro límite positivo o negativo. Este límite [1] *, si existe, tiene un valor determinado para cada valor particular de x* [2] *, pero varía con x. Así, por ejemplo, si se toma* $f(x) = x^m$*, siendo m un número entero, entonces la razón entre las diferencias infinitamente pequeñas será:*

$\frac{(x+i)^m - x^m}{i} = mx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^{m-2} i + \ldots + i^{m-1}$ *que tendrá por límite la cantidad* mx^{m-1}*. Es decir, una nueva función de la variable x. En general sucederá lo mismo. Sólo la forma de la nueva función, que servirá de límite a la razón [f(x+i) - f(x)] / i, dependerá de la forma de la función y = f(x) propuesta. Para indicar esta dependencia, la nueva función se llama "función derivada" y se designa, con la ayuda de un acento, por la notación*

y´ o f´(x)

En la investigación de las derivadas de las funciones de una variable x es útil distinguir las funciones que se llaman "simples", que se consideran como el resultado de una sola operación efectuada sobre la variable, de las funciones que se construyen con la ayuda de muchas operaciones, y que se llaman "compuestas". Las funciones simples que generan las operaciones del álgebra y la trigonometría (véase la 1ª parte del "Cours d'Analyse", capítulo 1º) pueden reducirse a las siguientes:

a + x, a – x, ax, a/x, x^a*,* A^x*, L(x), sen x, cos x, arcsen x, arccos x,*

donde A es un número constante [3] *, a = ±A es una cantidad constante* [4] *, y la letra L indica el* *logaritmo tomado en el sistema cuya base es A. Si se toma una de estas funciones simples en lugar de y, será fácil, en general, obtener la función derivada y´. Por ejemplo, se obtiene que*

$$para\ y = a + x,\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(a+x+i)-(a+x)}{i} = 1,\ y' = 1;$$

$$para\ y = a - x,\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(a-x-i)-(a-x)}{i} = -1,\ y' = -1;$$

$$para\ y = ax,\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a(x+i)-ax}{i} = a,\ y' = a;$$

$$para\ y = \frac{a}{x},\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{a}{x+i}-\frac{a}{x}}{i} = -\frac{a}{x(x+i)},\ y' = -\frac{a}{x^2};$$

$$para\ y = sen\, x,\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{sen\frac{1}{2}i}{\frac{1}{2}i}cos\left(x+\frac{1}{2}i\right)$$

5 $,\ y' = cos\, x = sen\left(x+\frac{\pi}{2}\right);$

$$para\ y = cos\, x,\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{sen\frac{1}{2}i}{\frac{1}{2}i}sen\left(x+\frac{1}{2}i\right)$$

6 $,\ y' = -sen\, x = cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right).$

Además, poniendo $i = \alpha x$, $A^i = 1 + \beta$, y $(1 + \alpha)^\alpha = 1 + \gamma$, se obtendrá

$$para\ y = L(x),\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{L(x+i)-L(x)}{i} = \frac{L(1+\alpha)}{\alpha x} = \frac{L(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}{x}$$

7 $,\ y' = \frac{L(e)}{x};$

$$para\ y = A^x,\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{A^{x+i}-A^x}{i} = \frac{A^i-1}{i}A^x = \frac{A^x}{L(1+\beta)^{\frac{1}{\beta}}}$$

8 $,\ y' = \frac{A^x}{L(e)};$

$$para\ y = x^a,\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+i)^a-x^a}{i} = \frac{(1+\alpha)^a-1}{\alpha}x^{a-1} = \frac{L(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}{L(1+\gamma)^{\frac{1}{\gamma}}}ax^{a-1}$$

9 $,\ y' = ax^{a-1}$

En estas últimas fórmulas, la letra e designa el número 2, 718. . . que es el límite [cuando α→0] *de la expresión. Si se toma este número como base de un sistema de logaritmos, se obtienen los logaritmos "Neperianos" o "hiperbólicos", que indicaremos con la ayuda de la letra l. Dicho esto, es evidente que l(e) = 1,*

$$L\,e = \frac{L\,e}{L\,A} = \frac{l\,e}{l\,A} = \frac{1}{l\,A};$$ 10

Además, se tendrá que

para $y = l(x)$, $y' = \frac{1}{x}$;

para $y = ex$, $y' = ex$.

Dado que las diversas fórmulas anteriores sólo están determinadas para aquellos valores de x a los que corresponden valores reales de y, deberíamos suponer que x es positivo en aquellas fórmulas que contienen las funciones L(x), l(x), y también la función x^a cuando a designa una fracción de denominador par o un número irracional.

Sea ahora z una segunda función de x, relacionada con la primera, y = f(x), mediante la fórmula

(2) $z = F(y).$

La función z o F(f(x)) será lo que se llama una "función de función" de la variable x. Si se designan por Δx, Δy, Δz, los incrementos infinitamente pequeños y simultáneos de las tres variables x, y, z, se obtendrá

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{F(y+\Delta y)-F(y)}{\Delta x} = \frac{F(y+\Delta y)-F(y)}{\Delta y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x},$$

de donde, tomando límites, resulta

(3) $z' = y' \cdot F'(y) = f'(x) \cdot F'(f(x)).$

Por ejemplo, si hacemos $z = ay$ *e* $y = l(x)$*, entonces* $z' = ay' = \frac{a}{x}$

.

Con la ayuda de la fórmula (3) se determinarán fácilmente las derivadas de las funciones simples A^x, x^a, arcsen x, arccos x, suponiendo que se conocen las derivadas de las funciones L(x), sen x, cos x. En efecto

para $y = A^x$, $L(y) = x$, $y'\cdot\frac{L(e)}{y} = 1$, $y' = \frac{y}{L(e)} = A^x\, l(A)$;

para $y = x^a$, $l(y) = a \cdot l(x)$, $y'\cdot\frac{1}{y} = \frac{a}{x}$, $y' = a\cdot\frac{y}{x} = ax^{a-1}$;

para $y = \operatorname{arcsen} x$, $\operatorname{sen} y = x$, $y'\cdot\cos y = 1$, $y' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

para $y = \arccos x$, $\cos y = x$, $y'\cdot(-\operatorname{sen} y) = 1$, $y' = \frac{-1}{\operatorname{sen} y} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Además, las derivadas de las funciones compuestas

$$A^y \ , \ e^y \ , \ \frac{1}{y}$$

Serán, en virtud de la fórmula (3), respectivamente

$$y' A^y\, l(A) \ , \ y' e^y \ , \ -\frac{y'}{y^2},$$

las derivadas de las siguientes

$$A^{B^x} \ , \ e^{e^x} \ , \ \sec x = \frac{1}{\cos x} \ , \ \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

serán

$$A^{B^x}\cdot B^x\cdot l(A)\cdot l(B) \ , \ e^{e^x}\cdot e^x \ , \ \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} \ , \ -\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}.$$

Para acabar, notemos que las derivadas de las funciones compuestas se determinan, en ocasiones, más fácilmente que las de las funciones simples. Así, por ejemplo, se encuentra que

$$\text{para } y = \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}, \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{i}\left(\frac{\operatorname{sen}(x+i)}{\cos(x+i)} - \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right) = \frac{\operatorname{sen} i}{i \cdot \cos x \cdot \cos(x+i)},$$

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$\text{para } y = \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}, \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{i}\left(\frac{\cos(x+i)}{\operatorname{sen}(x+i)} - \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right) = -\frac{\operatorname{sen} i}{i \cdot \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen}(x+i)},$$

$$y' = \frac{-1}{\operatorname{sen}^2 x};$$

y, finalmente,

$$\text{para } y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x, \quad \operatorname{tg} y = x, \quad \frac{y'}{\cos^2 y} = 1, \quad y' = \cos^2 y = \frac{1}{1+x^2};$$

$$\text{para } y = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x, \quad \operatorname{ctg} y = x, \quad \frac{-y'}{\operatorname{sen}^2 y} = 1, \quad y' = -\operatorname{sen}^2 y = \frac{-1}{1+x^2}.$$

Notas:

1 $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{i \to 0} \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$

2 Cauchy se refiere al concepto de derivada de una función en un punto.

3 Número real positivo.

4 Número real.

5 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\operatorname{sen}(x+i) - \operatorname{sen} x}{i} = \frac{2\cos\frac{(x+i)+x}{2}\operatorname{sen}\frac{(x+i)-x}{2}}{i} = \frac{\cos\left(x+\frac{i}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{i}{2}}{\frac{i}{2}}$

6 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cos(x+i) - \cos x}{i} = \frac{-2\,\mathrm{sen}\frac{(x+i)+x}{2}\,\mathrm{sen}\frac{(x+i)-x}{2}}{i} = \frac{-\mathrm{sen}\left(x+\frac{i}{2}\right)\mathrm{sen}\frac{i}{2}}{\frac{i}{2}}$

7 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{L(x+i) - L(x)}{i} = \frac{L\left(\frac{x+i}{x}\right)}{i} = \frac{L\left(1+\frac{i}{x}\right)}{i} = \frac{L\left(1+\frac{\alpha x}{x}\right)}{\alpha x} = \frac{L(1+\alpha)}{\alpha x} = \frac{L(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}{x}$

8 $A^i = 1 + \beta \Rightarrow i = L\,A^i = L(1 + \beta)$

Entonces:

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{A^{x+i} - A^x}{i} = \frac{A^i - 1}{i}A^x = \frac{1+\beta-1}{L(1+\beta)}A^x = \frac{A^x}{\frac{L(1+\beta)}{\beta}} = \frac{A^x}{L(1+\beta)^{\frac{1}{\beta}}}$

9 $(1+\alpha)^a = 1+\gamma \Rightarrow a\,L(1+\alpha) = L(1+\gamma) \Rightarrow \quad \frac{1}{a} = \frac{L(1+\alpha)}{L(1+\gamma)}$

Por tanto:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+i)^a - x^a}{i} = \frac{(x+\alpha x)^a - x^a}{\alpha x} = \frac{x^a(1+\alpha)^a - x^a}{\alpha x} =$$

$$= \frac{(1+\alpha)^a - 1}{\alpha x}x^a = \frac{(1+\alpha)^a - 1}{\alpha}x^{a-1} =$$

$$= \frac{(1+\gamma) - 1}{\alpha}x^{a-1} = \frac{\gamma}{\alpha}\cdot\frac{1}{a}\cdot ax^{a-1} = \frac{\gamma}{\alpha}\cdot\frac{L(1+\alpha)}{L(1+\gamma)}\cdot ax^{a-1} =$$

$$= \frac{\frac{1}{\alpha}L(1+\alpha)}{\frac{1}{\gamma}L(1+\gamma)}\cdot ax^{a-1} = \frac{L(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}{L(1+\gamma)^{\frac{1}{\gamma}}}ax^{a-1}$$

10 $L(e) = p \Rightarrow A^p = e \Rightarrow p \cdot l(A) = l(e) \Rightarrow p = L(e) = \frac{l(e)}{l(A)} = \frac{1}{l(A)}$

.

Referencias on line

- *Résumé des Leçons données a l'École Royale Polytechnique, sur le Calcul Infinitésimal*

http://www.polymedia.polytechnique.fr/EnLignes/Cours_Histo/Cauchy_1823.pdf