

«Pitágoras investigó los teoremas de un modo inmaterial e intelectual y descubrió la dificultad de los números irracionales y la construcción de las figuras cósmicas [poliedros]»

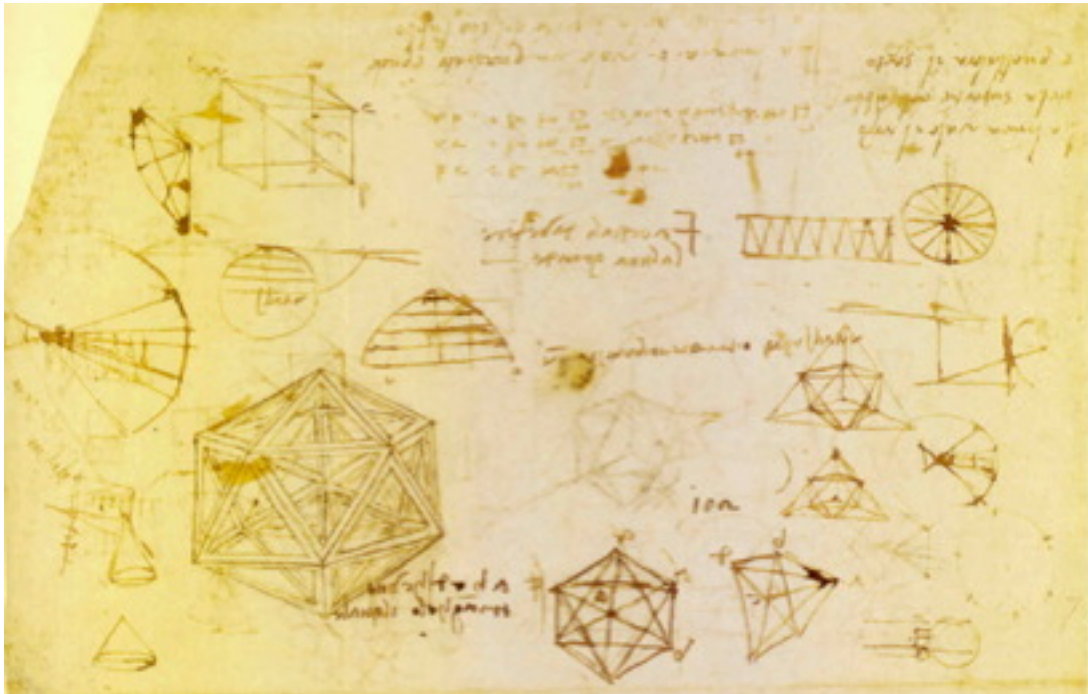
PROCLO DE LICIA. Comentarios al Libro I de los Elementos de Euclides.

«Hace falta explicar qué propiedades deberían tener los cuerpos más bellos, [...], deben tener la propiedad de dividir en partes iguales y semejantes la superficie de la esfera en que están inscritos».

PLATÓN. Timeo 54b-55a.

«La culminación de Los Elementos de Euclides con la construcción de los poliedros responde al interés especial que mostraban los filósofos griegos por todo lo que atañe a los cuerpos regulares».

F.KLEIN. Matemática elemental desde un punto de vista superior. Vol. II. Geometría. Biblioteca Matemática. Dtor: J.Rey Pastor. Madrid, 1931. p.260.



Estudios de Leonardo da Vinci (1513) sobre la Geometría de los poliedros con especial énfasis

ÍNDICE

1. Introducción
2. Los poliedros en el Neolítico
3. La Cosmogonía poliédrica pitagórica
4. Los Poliedros en *El Timeo* de Platón
5. El Libro XIII de *Los Elementos* de Euclides
6. Los Poliedros en el Renacimiento. Della Francesca, Luca Pacioli y Durero
7. La Cosmología poliédrica de Kepler
8. Los poliedros en los tiempos modernos
9. Los Poliedros en el Arte del siglo XX: Gaudí, Escher y Dalí
10. Epílogo
11. Bibliografía

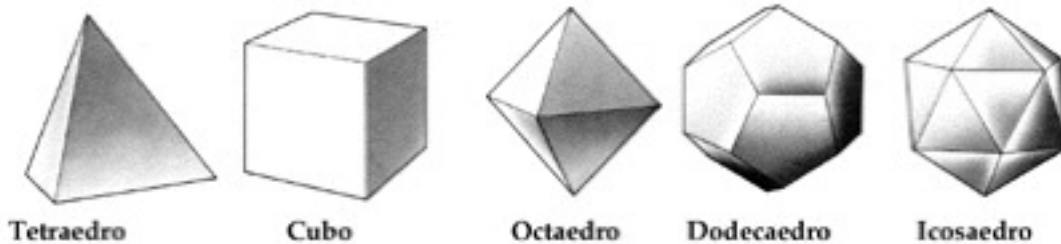
1. Introducción

La exuberante geometría de los *sólidos platónicos*, por sus significativos atributos de naturaleza geométrica, estética, simbólica, mística y cósmica, ha fascinado en todas las civilizaciones, desde los pueblos neolíticos hasta nuestros días. Los poliedros son el núcleo de la cosmogonía pitagórica del *Timeo* de Platón que los asocia con la composición de los elementos naturales básicos, teoría de orden místico-filosófico que tendrá una decisiva influencia en la cosmología poliédrica de Kepler. Euclides recoge la herencia pitagórica y platónica y sitúa a los cinco sólidos regulares en el clímax final de *Los Elementos*, como glorificación y cenit de un tratado geométrico tan brillante, en lo que se considera el primer teorema de clasificación de la Matemática.

Los poliedros han sido en todas las épocas símbolo y expresión placentera de la belleza ideal, de ahí su presencia en la composición de muchas obras y tratados de artistas y teóricos renacentistas (Piero della Francesca, Pacioli, Leonardo, Durero,...), que diseñan y escriben entre el Arte y la Geometría, tomando como argumento el encanto y la seductora perfección de los sólidos platónicos.

En los tiempos modernos los poliedros han sido un importante nexo que vincula cuestiones de

Matemática superior (Topología algebraica, Teoría de Grupos, ...) con la resolución de ecuaciones algebraicas y la Cristalografía, pero también, por su belleza y misterio, una fuente inagotable de inspiración que enciende la fantasía de creadores, diseñadores y artistas, entre los que sobresale la espectacularidad de los impresionantes trabajos de aplicación de los poliedros en Gaudí, Escher y Dalí, que como sus antepasados, geómetras y artistas, imputan a su geometría funciones de orden estético, cosmológico, científico, místico y teológico.



Nota: La mayor parte del contenido de este texto es la traducción al castellano del siguiente artículo que he publicado en catalán:

GONZALEZ URBANEJA, P.M.: [Els sòlids pitagòricoplatònics. Geometria, Art, Mística i Filosofia](#)

. BIAIX. 21, pp. 10-24, 12/03. Federació d'entitats per a l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya.

2. Los poliedros en el Neolítico

Los poliedros regulares son sólidos limitados por idénticos polígonos regulares, en los que concurren en cada vértice igual número de caras.

El significado simbólico, místico y cósmico de los poliedros regulares se remonta a los primeros estadios de la Civilización. Critchlow (1979) da una prueba fehaciente de que ya eran conocidos por los pueblos neolíticos y por las primeras culturas históricas europeas, como muestran las siguientes ilustraciones:

Los Sólidos Platónicos: Historia de los Poliedros Regulares

Escrito por Pedro Miguel González Urbaneja

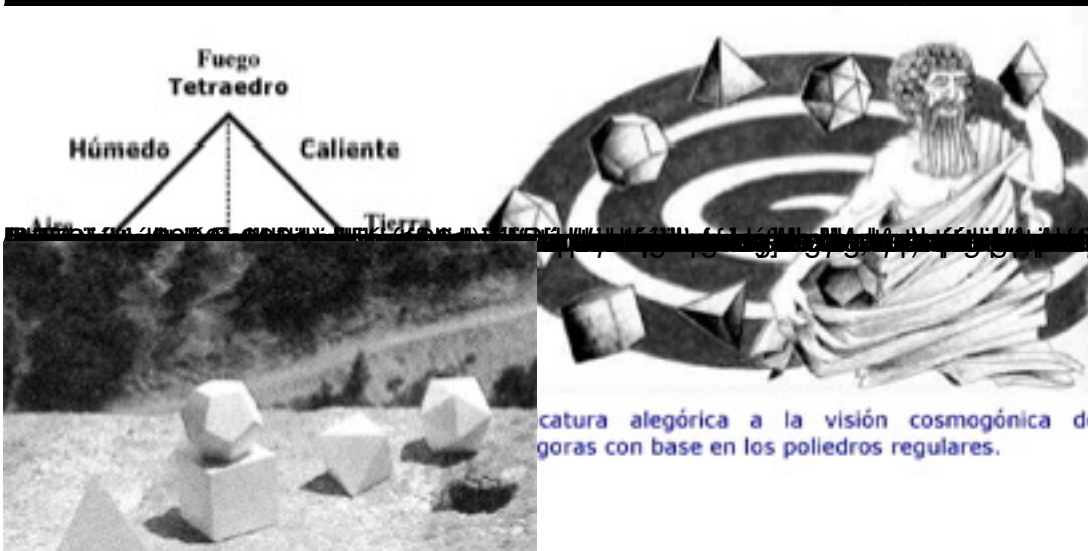
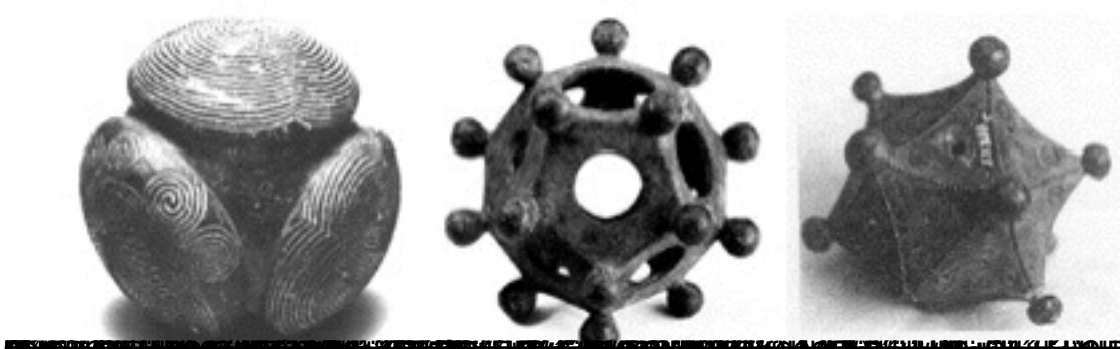


Ilustración alegórica a la visión cosmogónica de Platón con base en los poliedros regulares.

Los Sólidos Platónicos: Historia de los Poliedros Regulares

Escrito por Pedro Miguel González Urbaneja



Los Sólidos Platónicos: Historia de los Poliedros Regulares

Escrito por Pedro Miguel González Urbaneja



Figura 1: Diagrama de un polígono regular de n lados. El ángulo interior es $\frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$ y el ángulo exterior es $\frac{360^\circ}{n}$ (Euclides VI 21).

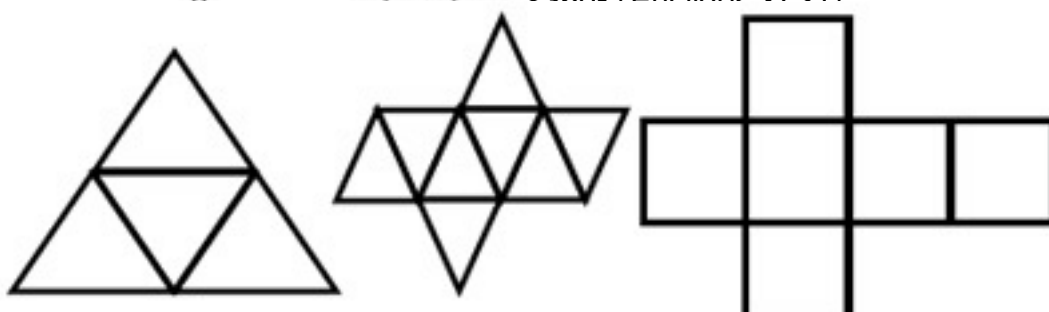
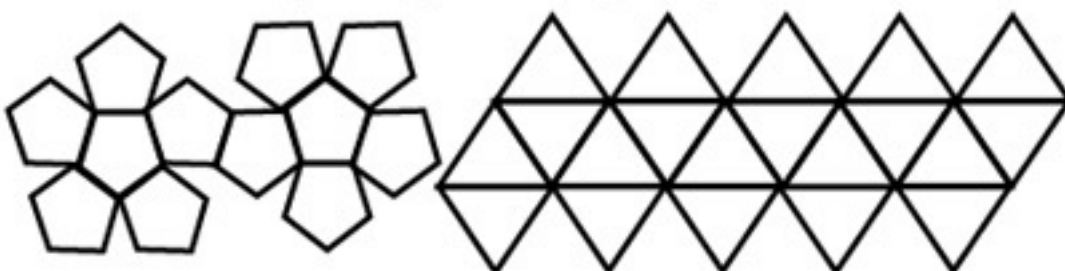
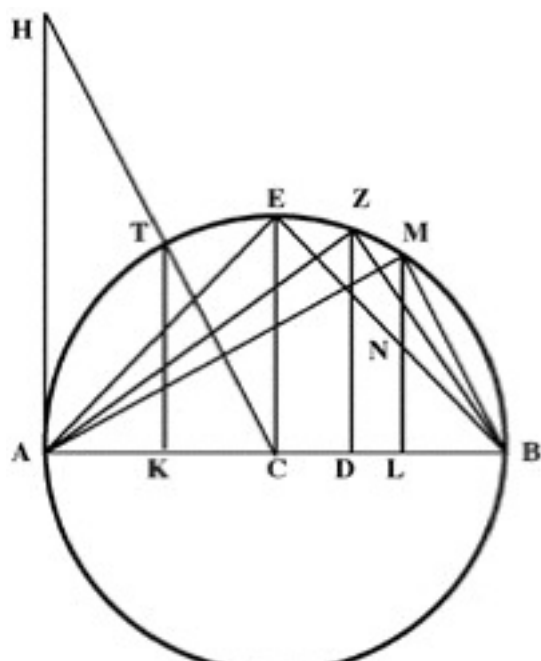


Figura 2: Desarrollo de los cinco poliedros regulares: Tetraedro, octaedro, cubo, dodecaedro e icosaedro.

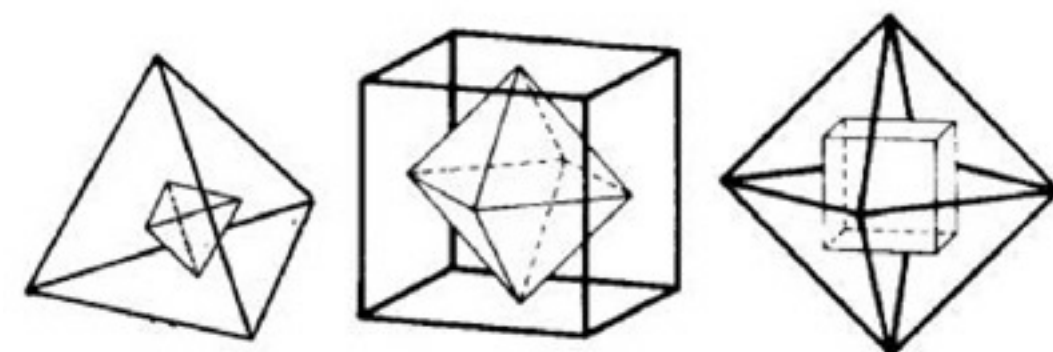


Los Sólidos Platónicos: Historia de los Poliedros Regulares

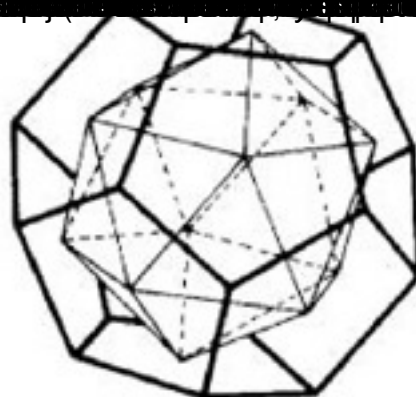
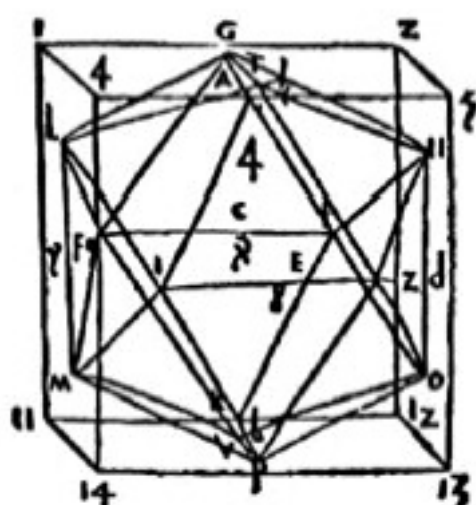
Escrito por Pedro Miguel González Urbaneja



Para que un polígono regular de n lados pueda ser construido con regla y compás, es necesario que el ángulo central θ sea un ángulo racional, es decir, que $\theta = \frac{360^\circ}{n}$ sea un ángulo racional. Esto ocurre si y solo si n es un número de la forma $2^k \cdot 3^l \cdot 5^m$, donde k, l, m son números enteros no negativos. En este caso, el ángulo central θ es un ángulo racional y el polígono puede ser construido con regla y compás.



Los sólidos platónicos son los únicos poliedros regulares que existen. Son los únicos poliedros que tienen todas sus caras congruentes y todos sus ángulos iguales. Los sólidos platónicos son: el tetraedro, el cubo, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro.



sólidos platónicos

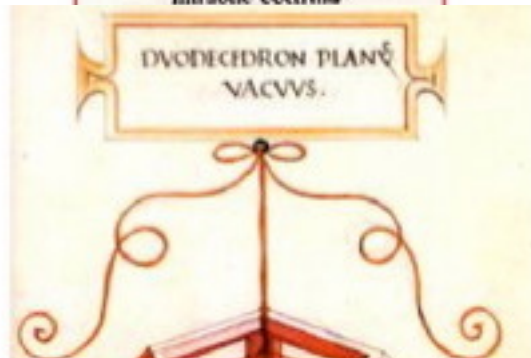
Los sólidos platónicos son los únicos poliedros regulares que existen. Son los únicos poliedros que tienen todas sus caras congruentes y todos sus ángulos iguales. Los sólidos platónicos son: el tetraedro, el cubo, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro.

SONETO A LOS POLIEDROS

Cinque corpi in natura son producti,
Da naturali semplici chiamati,
Perchè a ciascum composito adunati
Per ordine concorran fra lor tutti.
Immixti, netti e puri fur constructi;
Quattro elementi e ciel così nomati,
Quali Platone vol che figurati
L'esser dien a infiniti fructi.
Ma perchè el vacuo natura abhorre,
Adistat li a quel de coele et munda

Dívina proportionē

O pera a tutti gl'ingegni perspi-
caci e curiosi necessaria. O ne cia-
scun studio di **D**ilosofia:
Prospectiva **P**ictura **S**culptu-
ra: **A**rchitectura: **M**usica: e
altre **M**athematiche: sua-
uissima: fertile: e ad-
mirabile doctrina



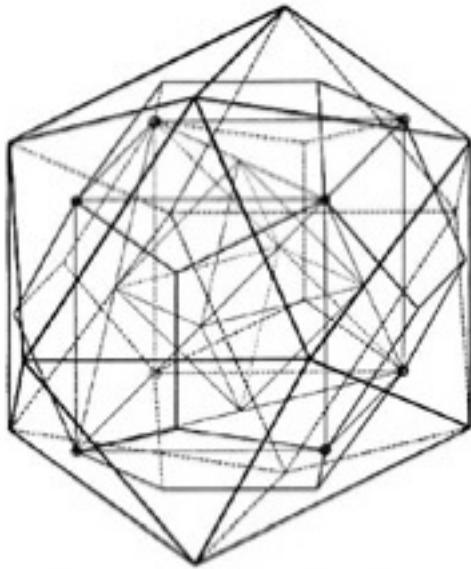
Diseños de Leonardo da Vinci de Poliedros (Vaticano 1508) que aparecen en la obra de Luca



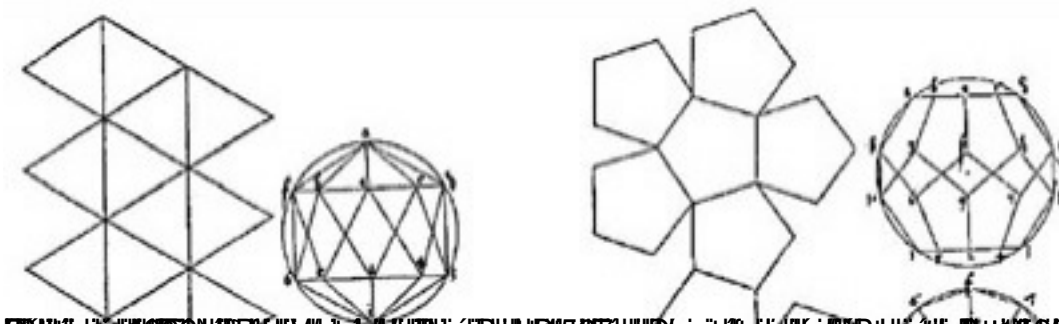
En España aparece en el libro de Pedro de Medina (1569) (Museo de Capodimonte, Nápoles) que (a

Los Sólidos Platónicos: Historia de los Poliedros Regulares

Escrito por Pedro Miguel González Urbaneja



Los cinco cuerpos platónicos inscritos de forma sucesiva cada uno dentro de otro, según Pacioli. Ilustración de la obra de M.Ghyka *El Número de Oro*, Poseidón, Barcelona, 1992, vol.1, cap.2, p.51.

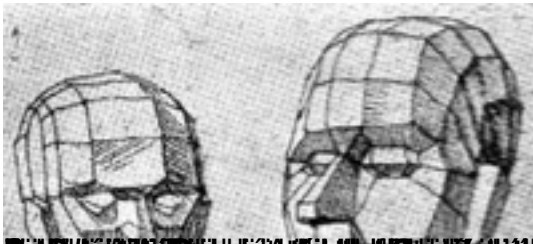


Diseños de Leonardo para *La Divina Proporción* del Rombicuboctaedro macizo (*solidus*) y vaciado (*vaccus*), poliedro arquimediano muy caro a Luca Pacioli.

A la derecha, el desarrollo plano de este poliedro en el Libro IV de *Underweysung* de Durero.

Los Sólidos Platónicos: Historia de los Poliedros Regulares

Escrito por Pedro Miguel González Urbaneja



Mosai
graj
Una t
Las ta
abiert
presen



Los Sólidos Platónicos: Historia de los Poliedros Regulares

Escrito por Pedro Miguel González Urbaneja

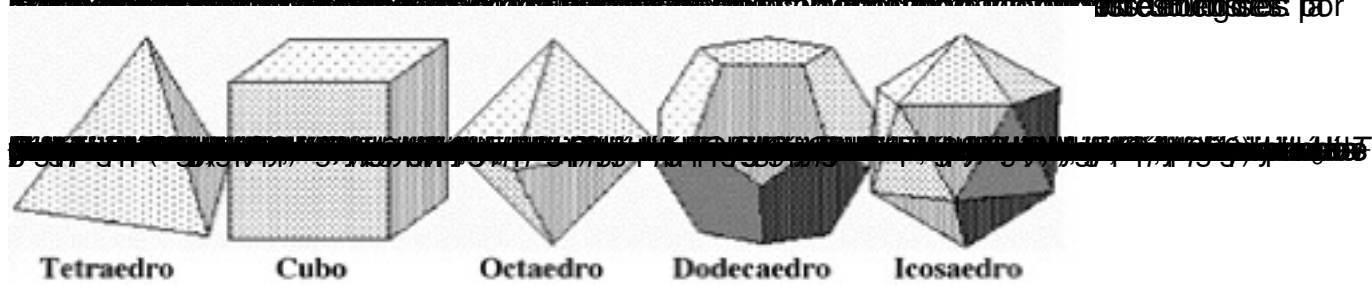


POLIEDROS REGULARES					
Nombre	p	q	C	V	A
Tetraedro	3	3	4	4	6
Cubo	4	3	6	8	12
Octaedro	3	4	8	6	12
Dodecaedro	5	3	12	20	30
Icosaedro	3	5	20	12	30

LA FÓRMULA DE EULER	
$(V - A + C = 2)$	
p: número de aristas en cada cara.	
q: número de caras en cada vértice.	
C: número de caras.	
V: número de vértices.	
A: número de aristas.	



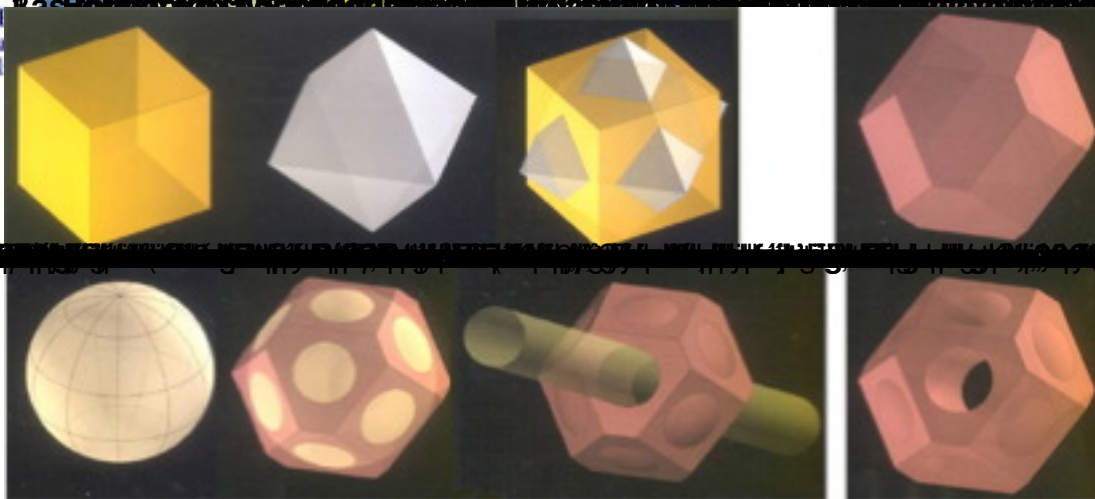
$$\frac{V}{4p} = \frac{A}{2p} = \frac{C}{2pq} = \frac{V-A+C}{2pq} = \frac{2}{2pq} = \frac{4pq}{4pq}$$



POLIEDROS EN LA SAGRADA FAMILIA DE GAUDÍ



1. Lám
2. L
una
pol



Los Sólidos Platónicos: Historia de los Poliedros Regulares

Escrito por Pedro Miguel González Urbaneja

