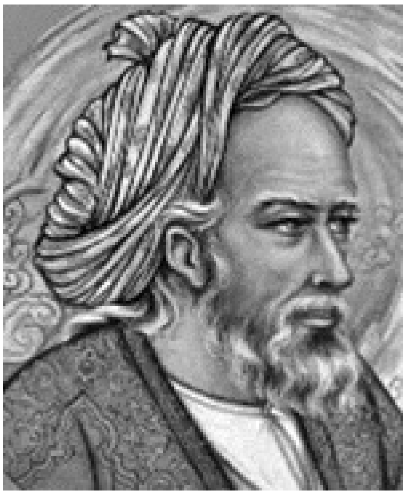

Poco se sabe de la vida de Omar Jayyam. Tan solo que nació a mediados del siglo XI en Nishapur (Persia), donde pasó casi toda su vida, y que murió en el 1131. En el 1074 fue llamado por Malik Sha para reformar el calendario, cuando ya era un famoso científico.

El Álgebra La obra fundamental de Jayyam es un Álgebra, escrita alrededor del 1074. Se conservan varias copias de fecha bastante temprana, por lo que es un tratado muy bien conocido.

En las ecuaciones algebraicas de grado menor o igual que tres reconoce Jayyam veinticinco formas distintas. Seis ya habían sido estudiadas por los algebristas anteriores. Otras cinco son reducibles a éstas. Las catorce restantes, que no pueden ser resueltas geométricamente con la sola ayuda de los Elementos, son las siguientes:

Cubo de la cosa igual a número x

Cubo de la cosa más cosa igual a número $x^3 + bx = c$

Cubo de la cosa más número igual a cosa $x^3 + c = bx$

Cubo de la cosa igual a cosa más número $x^3 = bx$

Cubo de la cosa más cuadrado de la cosa igual a número $x^3 + ax^2$

Cubo de la cosa más número igual a cuadrado de la cosa $x^3 + c = ax^2$

Cubo de la cosa igual a cuadrado de la cosa más número $x^3 = ax$

Cubo de la cosa más cuadrado de la cosa más cosa igual a número $x^3 + ax^2 + bx$

Cubo de la cosa más cuadrado de la cosa más número igual a cosa $x^3 + ax^2 + c =$

Cubo de la cosa más cosa más número igual a cuadrado de la cosa $x^3 + bx + c = ax$

Cubo de la cosa igual a cuadrado de la cosa más cosa más número
$x^3 = ax^2 + bx$

Cubo de la cosa más cuadrado de la cosa igual a cosa más número
$x^3 + ax^2 = bx$

Cubo de la cosa más cosa igual a cuadrado de la cosa más número
$x^3 + bx =$

Cubo de la cosa más número igual a cuadrado de la cosa más cosa
$x^3 + c =$

Después de demostrar unos lemas muy sencillos, veremos como Jayyam resolvió algunas de ellas. Las palabras “número” y “segmento” serán utilizadas indistintamente.

LEMA 1: Dados dos segmentos *a* y *b*, encontrar otros dos *x* e *y* tales que:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$$

Jayyam resuelve este problema igual que Menecmo, cortando dos parábolas.

LEMA 2: Sean dos paralelepípedos de bases cuadradas de lados *a* y *b*. La altura del primero es *h*. Queremos calcular la altura del segundo (lo cual significa fabricar un segmento igual a dicha altura) para que ambos tengan idéntico volumen (figura 1).

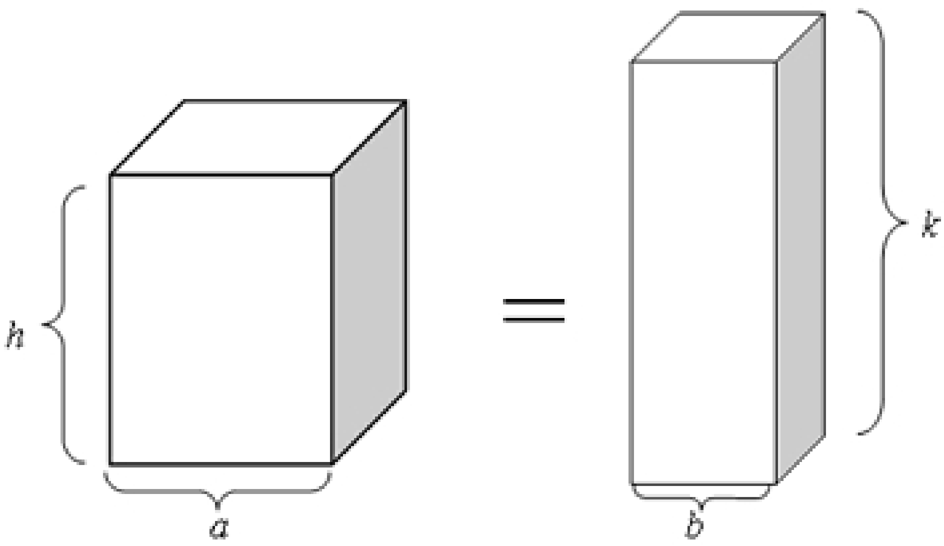

Figura 1

La proposición 11 del libro VI de los Elementos de Euclides permite dibujar un segmento de longitud m tal que $a/b=b/m$. Con la proposición 12 del mismo libro construimos un segmento k cuarto proporcional de m, a y h, esto es, tal que $m/a=h/k$. Este segmento es la altura buscada. En efecto, por la proposición 34 del libro XI:

Volumen del primero $= a^2h = a(ah) = a(mk) = (am)k = b^2k =$ *Volumen del segundo*

LEMA 3: Conocemos ahora la altura del segundo paralelepípedo y queremos saber el lado de su base. Buscamos un segmento m cuarta proporcional de las tres longitudes conocidas $k/n=a/m$: Mediante la proposición 13 del libro VI fabricamos otro segmento b media proporcional entre a y m: $a/b=b/m$. La misma cadena de igualdades utilizada más arriba demuestra que este segmento es el lado buscado.

1. Ecuación $x^3=c$. Según el lema 1 podemos encontrar dos segmentos x e y tales que $1/x=x/y=y/c$. Ahora bien, según la primera igualdad, $x^2=y$. Entonces:

$$\frac{x^2}{c}=\frac{y}{c}=\frac{x}{y}=\frac{1}{x}$$

De aquí se deduce que $x^3=c$. El segmento x es solución de la ecuación. Ecuación $x^3+bx=c$. Dibujamos un cuadrado de lado $\sqrt{b}$ (proposición 13 del libro VI de los Elementos) y sobre él, por el lema 2, un paralelepípedo de altura h y volumen *c*. Construimos ahora una parábola de vértice *O* y lado recto $OA=\sqrt{b}$, y un círculo de diámetro $OH=h$ y tangente al eje de la parábola en su vértice (ver figura 2).

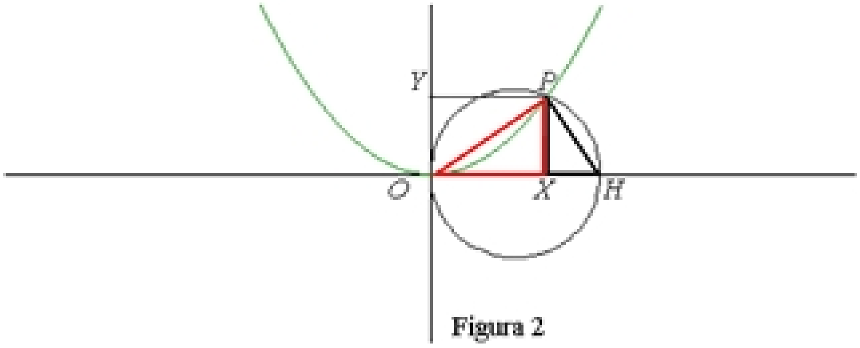

Figura 2

Ambas curvas se cortan en *O* y en otro punto *P*. En adelante nos fijaremos en los segmentos $OX=x$ y $OY=y$ que el punto de encuentro de las cónicas proyecta sobre rectas relacionadas con ellas (en este caso, el eje de la parábola y el diámetro de la circunferencia perpendicular a él).

Por la proposición 33 del libro III y el corolario de la proposición 8 del libro VI de los Elementos, los triángulos rojo y verde son semejantes: $\frac{OX}{OY}=\frac{OY}{HX}$

Y por ser P un punto de la parábola:

$$\frac{OA}{OX}=\frac{OX}{OY}$$

Combinamos las do proporciones y tenemos lo siguiente: $\frac{OA^2}{OX^2}=\frac{OX}{OY}\frac{OY}{HX}=\frac{OX}{HX}$

de donde se deduce que $OX^3=OA^2HX$. El segmento $OX=x$ es la solución:

$x^3+bx = OX^3+OA^2OX = OA^2HX+OA^2OX = OA^2(OX+HX) = OA^2OH = bh = c$ Ecuación $x^3+cx = bx$.

Los segmentos *OA*

y *OH* y la parábola son los de antes. Tangente en *O* a su eje, dibujamos una hipérbola de lado recto *OH* (figura 3).

La rama de la derecha de la hipérbola puede no cortar a la parábola, tocarla en un punto o cortarla en dos, con lo cual la ecuación carecería de soluciones, tendría una o tendría dos (a ojos de Omar Jayyam: para él no existen soluciones negativas ni complejas). Suponemos que se encuentran por lo menos en un punto ***P***. Por ser un punto de la hipérbola (y la proposición 21 del libro I de las Cónicas de Apolonio): $PX^2 = OY^2 = OX\ HX$ y en consecuencia $\frac{OX}{OY} = \frac{OY}{HX}$

y por serlo de la parábola: $\frac{OA}{OX} = \frac{OX}{OY}$

Entonces sucede lo que viene a continuación:

$$\frac{OA^2}{OX^2} = \frac{OY^2}{HX^2} = \frac{OX\,HX}{HX^2} = \frac{OX}{HX}$$

[illegible]

$$\frac{OY}{OH} = \frac{OH}{OX}$$

Y por estar P en la parábola

$$\frac{AX}{OY} = \frac{OY}{OH}$$

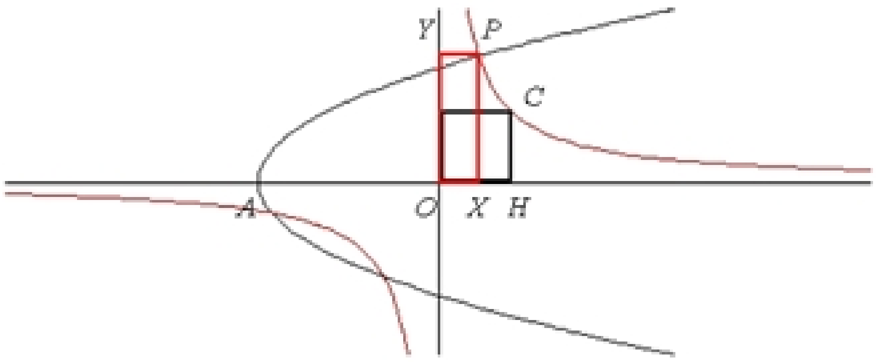

Figura 4

Entonces tenemos lo siguiente:

$$\frac{OH^2}{OX^2} = \frac{AX^2}{OY^2} = \frac{AX\,AX}{AX\,OH} = \frac{AX}{OH}$$

[illegible]

$$\frac{PD}{DC} = \frac{OB}{OX}$$

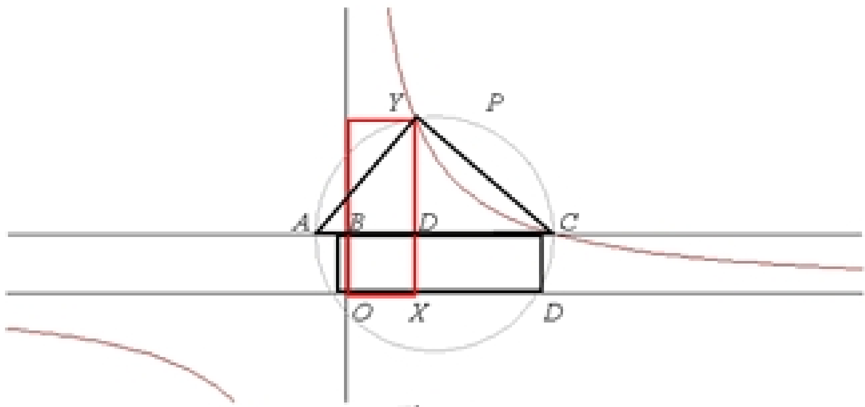

Figura 5

[illegible] de los Elementos, y por el corolario de la proposición 8 [illegible] por la proposición 32 del libro III

$$\frac{PD}{DC} = \frac{AD}{PD}$$

Entonces tenemos que

$$\frac{OB^2}{OX^2} = \frac{PD}{DC}\,\frac{AD}{PD} = \frac{AD}{DC}$$

[illegible]

$\frac{PC}{AC} = \frac{BC}{BE}$ (lo cual equivale a resolver la ecuación trigonométrica $\frac{1}{\cos\theta} = \frac{sen\,\theta}{1 - sen\,\theta}$)

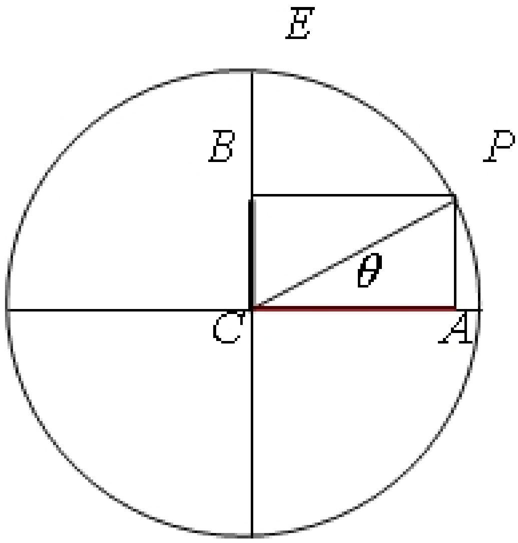

Figura 8