1. VIDA

Norbert Wiener nació en Columbia, Missouri (Estados Unidos) el 26 de noviembre de 1894. Era de origen judío, aunque no supo de esto hasta su adolescencia. Su padre, Leo Wiener (1862-1939), era una persona de carácter. Había llegado a Estados Unidos cuando tenía solamente 18 años, sin una formación académica formal, y, gracias a su tremenda facilidad para las lenguas, consiguió con el tiempo un puesto como profesor de lenguas eslavas en la universidad de Harvard, donde ocuparía una cátedra a partir de 1911 y se jubilaría como profesor emérito en 1930. Parece ser que la madre de Wiener, de nombre Bertha, no ejerció demasiada influencia sobre éste. En su autobiografía, Wiener solamente menciona que era "una mujer pequeña, vigorosa y vivaz" , mientras que al padre le dedica largas páginas en las que se mezclan la admiración y el resentimiento. Parece ser que su padre le amargó la infancia, al hacerse cargo personalmente de su educación y someterlo a una disciplina férrea, que acabaría marcando en él un carácter inseguro y suspicaz.

Wiener tuvo el honor de la fama (o la desgracia, según se mire) en al menos dos momen-tos importantes de su vida. El primero fue cuando comenzó sus estudios universitarios en el Tufts Collegue, con sólo 11 años de edad. Así, Wiener era calificado de "niño prodigio" y sometido a la presión de la prensa. Asistía a las clases cuando aún llevaba, en sus propias palabras, pantalones cortos. Se licenció sin problemas y, tras algunos fracasos personales en su intento de comenzar una carrera en zoología, fue enviado a realizar el doctorado a Harvard. Allí defendió una tesis sobre una cuestión técnica de lógica matemática, rela-cionada con los trabajos recientes de Russell y Whitehead, obteniendo el título de doctor con sólo 18 años. La otra ocasión de fama vendría mucho tiempo después, cuando publicó sus primeros trabajos sobre cibernética y, además, se enfrentó al status qua al denunciar el uso inmoral que se estaba realizando de la ciencia, sometiendo la a intereses puramente militares.

Tras defender su tesis, Wiener obtuvo una beca para visitar a Russell en Inglaterra. Sin embargo, no se estableció una relación fluida entre ellos, lo cual llevó a Wiener a abandonar sus intereses en lógica matemática y, con la ayuda del también genio de las matemáticas Hardy, se introdujo en el análisis matemático. Concretamente, Hardy explicó a Wiener los entresijos del mundo de la variable compleja y la teoría de la medida. Estos fueron dos de los ingredientes fundamentales con los que Wiener condimentaría una larga trayectoria investigadora, en la que con el tiempo logró importantes éxitos. Un tercer y cuarto ingredientes fueron el análisis de Fourier y una visión profunda de los problemas de la física, la ingeniería electrónica y la biología.

Wiener no empleó todo el tiempo de su beca en permanecer en Inglaterra sino que aprovechó su cercanía al viejo continente para visitar Alemania. En particular, viajó a Gotinga, donde asistiría a los cursos de Hilbert y Landau. Además, durante su estancia estudió algo de física, mostrando un especial interés por los trabajos de Einstein de 1905 (su "año milagroso", en el que investigaría entre otros temas el efecto fotoeléctrico, el movimiento Browniano y la teoría especial de la relatividad). En 1914 estalló la Gran Guerra y Wiener volvió rápidamente a Estados Unidos, donde pasaría el verano en New Hampshire. Luego volvió a Inglaterra, pero allí no estaban las cosas como para dedicarse a la investigación y, además, no encontraba a nadie con quien poder colaborar, así que regresó a la casa familiar, a Boston.

Pasaron cuatro largos años, en los que Wiener iría cambiando de un empleo a otro, hasta que, en 1919, consiguió un puesto de profesor en el Instituto Tecnológico de Massachusets (MIT). Allí permanecería el resto de su vida académica. Se puede decir que Wiener disfrutó, a partir de entonces, de la vida típica de un profesor universitario estadounidense, dedicado sobre todo a sus investigaciones. En otras palabras, al tener resuelta su economía (y más, tras conseguir una cátedra, en 1931) su vida se centró completamente en la investigación y el cuidado de sus relaciones con el resto de eruditos con los que trabajó, o a los que admiró, tanto en Estados Unidos como en Europa y otros países, como México o China. A Wiener le encantaba viajar y, probablemente herencia de su padre, disfrutaba mucho con los idiomas. Sobre él se ha dicho que "hablaba varios idiomas ... pero no se le entendía bien en ninguno de ellos" .

Entre 1920 y 1923, Wiener obtuvo su primer gran éxito, que fue la consecución de un modelo matemático para el movimiento Browniano. Además, en 1920, durante una visita a Fréchet, justo antes del congreso internacional de matemáticos que tendría lugar en Estrasburgo ese mismo año, propuso un conjunto de axiomas para la caracterización de ciertos espacios, que luego se comprobaría que coincidían plenamente con los espacios que Banach estaba estudiando simultáneamente en Polonia. Wiener se dedicó muy pronto a otros temas, al verse desbordado por la cantidad de publicaciones que aparecían constan-temente en relación a los espacios de Banach- Wiener. No soportaba la competencia. Le desquiciaba pensar que cualquier día podría encontrarse con que alguien había publicado ya algo en lo que él estaba trabajando en ese momento. Ya de vuelta en EEUU, se ocupó durante un tiempo en la solución de un problema muy importante en teoría del potencial: el problema de Zaremba. Esta cuestión también le causó algunas dificultades, pues su bril-lante resolución del problema dejaba en evidencia el trabajo que aún estaban realizando algunos matemáticos en Harvard, y Kellogg le pidió que retrasara su publicación. Esto sentó muy mal a Wiener y, por supuesto no lo hizo. De esta forma Wiener consiguió un poco de respeto por parte de sus colegas norteamericanos

-que no habían sabido apreciar sus otros trabajos-, pero a cambio tuvo un fuerte enfrentamiento personal con Kellog, que era ya un prestigioso e influyente matemático de Harvard.

Wiener trabajó muy duro en varias cuestiones matemáticas relacionadas con la in-geniería eléctrica. Su primera contribución en este campo fue proporcionar una base matemática sólida para el cálculo operacional de Heaviside, pero tras esto vinieron muchas otras aportaciones importantes. Entre ellas, le debemos una buena parte del lenguaje y las técnicas de la teoría de filtros de ondas, tanto en el caso determinista como en el caso aleatorio. Además, su ampliación del análisis armónico y, en particular, la introducción de técnicas propias del cálculo de probabilidades en este área, han tenido una enorme repercusión en el desarrollo de la matemática aplicada en general y de la teoría de la comunicación en particular. Trabajó en colaboración tanto con matemáticos de primera fila, como Paley o Hopf, como con físicos (Born), ingenieros (Lee, Bigelow), fisiólogos (Rosenblueth), etc. Consiguió, con su publicación de "Cibernética" en 1948, dar el salto a la fama, más allá de los círculos profesionales relacionados con las matemáticas o la ingeniería.

Como ya hemos mencionado, le gustaba viajar. Tras su reclutamiento en el **MIT** pasó muchos veranos visitando a matemáticos en Europa y, posteriormente, también viajaría a China, India y, en numerosas ocasiones, a México.

Apostó fuertemente por el carácter internacional y puramente apolítico de las matemá-ticas, asistiendo siempre que pudo a los congresos internacionales de matemáticos. Par-ticipó, desde su posición de catedrático en el **MIT,** en el reclutamiento de numerosos matemáticos judíos que tuvieron que exiliarse tras el ascenso de Hitler al poder. Entre otros, es seguro que ayudó a encontrar una posición en EEUU a O. Szász, H. Rademacher, G. Polya, G. Szégö y K. Menger. Durante la segunda guerra mundial se ocupó de estudiar el problema de la predicción de la posición de un blanco móvil mediante el uso de filtros causales y técnicas estadísticas. En ese periodo redactó un informe técnico (secreto, muy a su pesar) que resolvía este problema de manera muy eficaz. Su informe vería la luz en 1949, en forma de monografía, un poco despues de que Kolmogorov publicara -con otras técnicas y en la URSS, en idioma ruso- resultados muy similares. Durante la locura del Macartismo, Wiener defendió abiertamente a algunos colegas del MIT que estaban siendo investigados. En particular, presionó al rector (amenazando con su inmediata salida del MIT) para que dicha institución no tomase represalias contra Struik por su supuesta vin-culación con el partido comunista. A Struik le impidieron dar clases pero mantuvieron su sueldo mientras estaba siendo investigado.

Wiener murió el 18 de marzo de 1964 en Estocolmo, de un ataque al corazón. Terminamos esta sección incluyendo una lista de los doctorandos de Wiener (que deja clara la enorme influencia que ha tenido su obra en el siglo XX), y una breve cronografía, con datos variados sobre su vida y obra.

Lista de doctorandos de Wiener.

- Gleason Kenrick. "A New Method of Periodogram Analysis with Il1ustrative Ap-plications" (tesis codirigida con Frank Hitchcock), 1927, MIT.
- Carl Muckenhoupt. "Almost Periodic Functions and Vibrating Systems" (tesis codirigida con Philip Franklin), 1929, MIT.
- Dorothy Weeks. "A Study of the Interference of Polarized Light by the Method of Coherency Matrices", 1930, MIT.
- Yuk Wing Lee. "Synthesis of Electric Networks by Means of the Fourier Trans-forms of Laguerre's Functions", 1930, MIT. (Lee tiene 258 descendientes científicos).
- Shikao Ikehara. "An Extension of Landau's Theorem in the Analytic Theory of Numbers", 1930, MIT.
- Sebastian Littauer. "Applications of the Fourier Transform Theorem on the Ex-ponential Scale", 1930, MIT.
- James Estes. "The Lift and Moment of an Arbitrary Aerofoil-Joukovsky Poten-tial", 1933, MIT.
- Norman Levinson. "On the Non-Vanishing of a Function", 1935, MIT. (Levinson tiene 377 descendientes científicos).
- Henry Malin. "On Gap Theorems", 1935, MIT.
- Bernard Friedman. "Analyticity of Equilibrium Figures of Rotation" ,1936, MIT. (Friedman tiene 100 descendientes científicos).
- Brockway McMillan. "The Calculus of the Discrete Homogeneous Chaos", 1939, MIT.
- Abe Gelbart. "On the Growth Properties of a Function of Two Complex Variables Given by its Power Series Expansion", 1940, MIT. (Gelbart tiene 66 descendientes científicos).
- Colin Cherry. "On Human Communication: A Review, a Survey, and a Criticism", 1956, Imperial College. (Cherry tiene 102 descendientes científicos).
- Amar Bose. "A Theory of Nonlinear Systems" (tesis codirigida con Yuk Wing Lee), 1956, MIT. (Bose tiene 69 descendientes científicos).
- Donald Brennan. "On the Pathological Character of Independent Random Vari-ables", 1959, MIT.
- William Stahlman. "The Astronomical Tables of Codex Vaticanusgraecus 1291", (tesis codirigida con Otto Neugebauer), 1960, Brown University.
- Donald Thfts., "Design Problems in Pulse Transmission", (tesis codirigida con Yuk Wing Lee), 1960, MIT. (Tufts tiene 126 descendientes científicos).
- George Zames. "Nonlinear Operators for System Analysis", (tesis codirigida con Yuk Wing Lee), 1960, MIT. (Zames tiene 11 descendientes científicos).

Cronología.

1894 Nace Norbert Wiener en Columbia, Missouri (EEUU), hijo de Leo Wiener y Bertha Kahn.

1901 Primer viaje a Europa.

1903 Primer ingreso de Wiener en la escuela. Antes de esto, su educación había corrido a cargo del padre.

1906-1909 Tufts Collegue. Se gradúa en filosofía, con mención especial en matemáticas, a los 14 años.

1913 Doctor en filosofía por la Universidad de Harvard. Becado para visitar a Russell. Conoce a Hardy. Viaja a Gotinga, donde conoce a Hilbert, Landau, etc. 1914 Inicio de la Primera Guerra Mundial. Wiener regresa a EEUU.

1917 EEUU entra en la Primera Guerra Mundial. Wiener intenta alistarse en el ejército pero no es admitido por su extrema miopía.

1919 Consigue trabajo como profesor en el departamento de matemáticas del MIT. 1920 Caracterización de la estructura de cuerpo en base a una única operación binaria. Congreso de Estrasburgo. Definición de los espacios de Wiener-Banach. Visita a Frechet.

1920-1923 Fundación matemática del movimiento Browniano.

1924 Solución del problema de Zaremba. Conflicto con O.D. Kellogg.

1925 Conferencia en Gotinga sobre el principio de incertidumbre de la teoría de señales. Es invitado para realizar una estancia el siguiente curso académico. Recibe a BUrll en el MIT, con quien redacta un importante artículo sobre mecánica cuántica. 1926 Cálculo operacional de Heaviside. Concepto de operador causal. Concepto de distribución. Solución generalizada de la ecuación del telégrafo. Se casa con Marguerite Engelmann.

1927 Nace Bárbara, la primera hija de Wiener.

1928 Primeros trabajos sobre teoremas Tauberianos.

1929 Profesor titular en el MIT. Nace Peggy, la segunda (y última) hija de Wiencr. 1930 Publica "Análisis Armónico Generalizado" en Acta Math. Tesis de Yuk Wing Lee.

1930-1931 Conoce a E. Hopf, a quien ayuda a entrar en el departamento de matemáticas del MIT. Publican juntos un importante artículo sobre ecuaciones integrales (en 1931). En él se estudian por primera vez las ecuaciones de Wiener-Hopf.

1931-1932 Profesor visitante en la Universidad de Cambridge. Da conferencias sobre La integral de Fourier y sus aplicaciones en el Trinity Collegue y publica su primera monografía sobre este tema en Cambridge University Press. Participa en el ICM de Zurich como representante del MIT.

1932 Publica "Teoremas Tauberianos" en Ann. of Math. Catedrático en el MIT.

1933 Premio Bocher. Elegido miembro de la Academia Nacional de Ciencias. Conoce a Arturo Rosenblueth, quien será su mejor amigo el resto de su vida. Visita de Paley, con quien trabajaría sobre la transformada de Fourier en el dominio complejo. Caracterización de los filtros físicamente realizables. Muerte de Paley en un accidente de sky.

1934 Libro con Paley.

1935 Primera patente con Yuk Wing Lee. (Habría otras dos más en 1938).

1935-1936 Viaje a China, donde visita a Y.W. Lee en la Tsing Hua University de Pekín. Participa en el ICM de Oslo. Conoce a S. Mandelbrojt.

1937 Conferencia Dohme en la John Hopkins University sobre teoremas Tauberianos. 1938 Conferencia semicentenaria de la AMS.

1940 Memorandum sobre un ordenador digital. Comienza a trabajar con J. Bigelow en su proyecto para el estudio de baterías antiaéreas.

1941 Dimite como miembro de la Academia Nacional de Ciencias.

1942 Redacción del Diablo Amarillo: "Extrapolación, interpolación, y suavizado de series temporales estacionarias" (El informe verá la luz en forma de libro y para un público no restringido en 1949). Conoce a McCulloch.

1943 Conoce a Pitts.

1944 Creación, con J. van Neumann, de la "Sociedad Teleológica".

1946 Nombrado doctor honoris causa por el Tufts Collegue. Asiste a las tres primeras Conferencias Macy. En diciembre publica su carta de denuncia en The Atlantic Monthly.

1946-1950 Consigue, junto con Rosenblueth, una beca de la Fundación Rockefeller para que puedan visitarse todos los años, un año en el MIT y al siguiente en el Instituto Nacional de

Cardiología de México.

1947 Congreso en Nancy sobre análisis armónico. Conoce a Freyrnann.

1948 Primera versión de Cibernética. (La segunda versión aparece en 1961). 1949 Lord & Taylor American Design Award.

1950 El uso humano de los seres humanos. (La segunda versión aparece en 1954).

1951 McCulloch y "sus chicos" se trasladan al Laboratorio de Investigación en electrónica del MIT. Wiener imparte una Conferencia Fullbright en París. Visita España, donde imparte una conferencia en Madrid.

1952 Ruptura con McCulloch. Premio Alvarega del Colegio de Médicos de Philadelphia. Imparte las conferencias Forbes-Haws en la Universidad de Miami.

1953 Ex-prodigio. Escuela de verano, con R. Fano y C. Shannon, sobre los problemas matemáticos de la teoría de la comunicación.

1955 Profesor visitante en Calcuta.

1956 Soy un matemático. Conferencia en Japón. Escuela de verano en la UCLA (repe-tirá en 1959,1961 y 1963)

1957 Doctor honoris causa por el Grinnell Collegue. Medalla Virchow de la Escuela médica Rudolf Virchow.

1960 Conferencias en la Universidad de Nápoles (vuelve en 1962). Visita a Rusia. Medalla de investigación ASTME. Profesor Emérito en el MIT.

1964 Medalla Nacional de Ciencias. Dios y Golem. Muere en Estocolmo de un ataque al corazón.

Existe abundante material sobre la vida y obra de Wiener (basta echar un vistazo a las referencias, al final de este artículo). En español se han publicado las monografías [1] Y [14], aunque esta última está agotada, fuera de circulación.

---

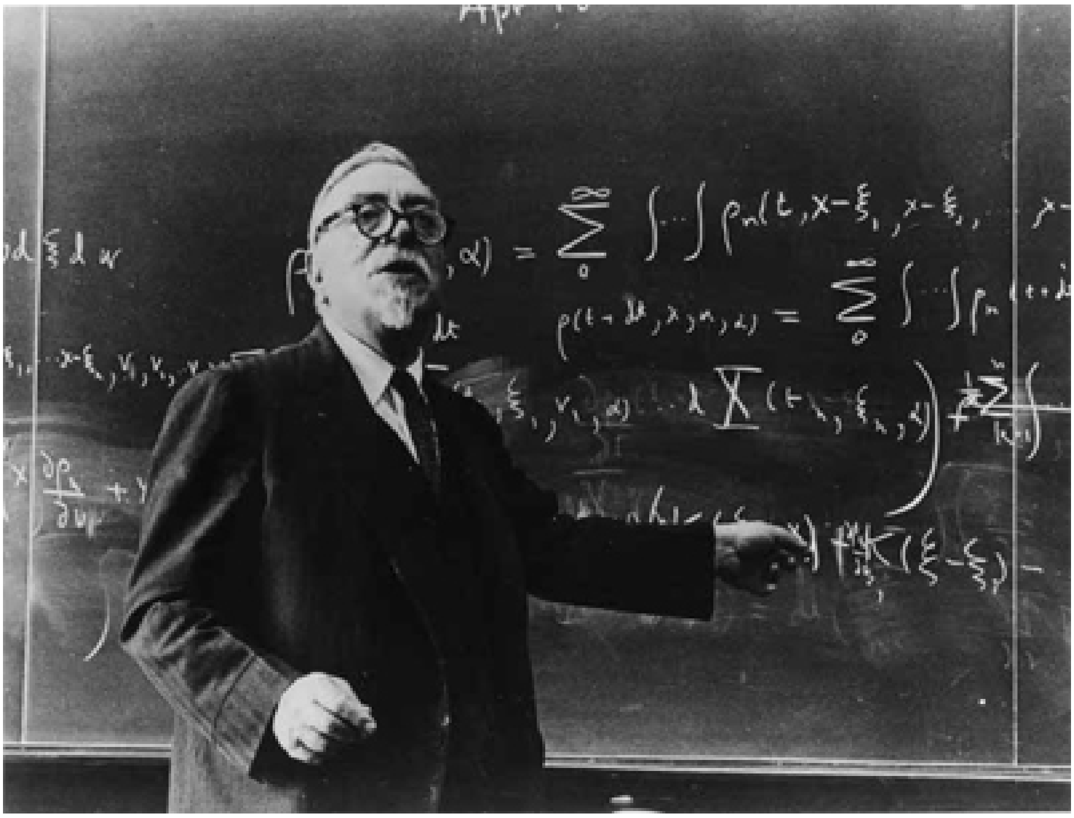
2. OBRA

La lista de aportaciones matemáticas importantes realizadas por Wiener es extensa y su temática es variada. En la siguiente tabla reflejamos aquellas que consideramos de mayor relevancia:

Aportaciones matemáticas más relevantes de N. Wiener.

- Movimiento Browniano. Introducción de los procesos estocásticos, precursor de la teoría de la probabilidad en espacios de dimensión infinita.
- Fundamento matemático para el cálculo operacional de Heaviside.
- Definición de los espacios de Banach (originalmente denominados espaclOS de Banach-Wiener).
- Teoría del Potencial -solución del Problema de Zaremba.
- Análisis armónico generalizado y teoremas Tauberianos. Nueva demostración del teorema del número primo.
- Definición de la transformada de Fourier $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$

.
- Filtrado y teoría de la predicción
- Memorandum sobre la construcción de un ordenador digital (1940)
- Cibernética
- Caos homogéneo
- Entropía, teoría ergódica, filtros no lineales, etc.



http://www.21stcenturywiener.org/

Evidentemente, en una reseña biográfica breve como la presente, no se pueden abordar una a una y en detalle todas las temáticas contenidas en la lista anterior. Es por ello que hemos optado, para dar una idea más precisa del tipo de trabajo que realizó nuestro personaje, por desarrollar sólo algunos de los items anteriores. Concretamente, en esta nota nos concentramos en el trabajo de Wiener relacionado con el análisis de Fourier. Un tratamiento detallado de toda la obra científica de Wiener, se puede encontrar en las monografías [4], [22]. Nosotros vamos a seguir aquí, en gran medida, los capítulos 3 y 4 de [4] y el artículo [5].

2.1. Un paseo desde el cálculo operacional de Heaviside hasta las distribuciones, utilizando técnicas de análisis de Fourier. Desde el momento en que Wiener llegó al MIT, se asumió que él podría ser la persona que ayudaría a la gente del depar-tamento de ingeniería eléctrica a proporcionar un fundamento sólido a las diversas her-ramientas matemáticas que ellos usaban para sus propias investigaciones. Concretamente, la tarea más urgente que se le asignó fue el establecimiento de un fundamento matemático sólido para el cálculo operacional de Heaviside (HOC, en todo este artículo). Esta cuestión le fue propuesta por Jackson -que era el director del departamento en 1920 y quien había sido un amigo de Wiener durante su infancia. La idea principal del HOC es tratar al operador diferencial

$p = d/dt$ como un objeto algebraico incluido en un cuerpo (desconocido) e identificar su inverso algebraico $q = p^{-1}$ con el operador integral $q\{f\}(x) =$ $f(t)dt$. Con estas hipótesis, el HOC sería útil para la resolución de numerosas ecuaciones difer-enciales mediante el procedimiento de trasladar el problema diferencial en un problema meramente algebraico.

Veamos, para entender cómo funciona la técnica que acabamos de describir, cómo se aplica este método a un ejemplo sencillo. Supongamos que queremos resolver un circuito *RC,* el cual queda descrito por la ecuación diferencial ordinaria $RCy'(t) + y(t) = x(t)$, donde R, C son constantes -la resistencia y la conductancia del circuito-, y $x(t) = i(t)u(t)$ es la diferencia de potencial introducida en el sistema. Aquí $u(t)$ representa la función de Heaviside, que vale 0 para $t \leq 0$ y 1 para $t > 0$. Finalmente, $y(t)$ es la salida del sistema.

Consideremos el caso especial dado por *x(t)* = *Eu(t),* donde *E* es una constante dada. Este es un ejemplo importante, pues modeliza el problema de introducir en el instante
t
= 0 una diferencia de potencial constante
E
en el sistema, y ver cuál es la respuesta del mismo. Si queremos usar, para resolver este problema, las técnicas del HOC, operamos del siguiente modo: comenzamos escribiendo el problema como
(RCp
+
l)y(t)
=
x(t),
de modo que
y(t)
=

x(t). A continuación, desarrollamos el cociente $\frac{1}{RCp+1}$
como serie de potencias de *q* = 1/*p*,

(1) $$\frac{1}{RCp+1} = (-1)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{(RC)^{k+1}}q^{k+1}.$$

Por último, utilizamos que $q^k\{u\}(t) = \frac{t^k}{k!}u(t)$
para *k* = 1,2, ... , de modo que

$$y(t) = (-1)E\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{(RC)^{k+1}}\frac{t^{k+1}}{(k+1)!}u(t) = E(1-e^{\frac{-t}{RC}})u(t),$$

que es la solución exacta de la ecuación.

Claro que hay varios pasos en la argumentación anterior que no tienen un sustento riguroso. Por ejemplo, no sabemos qué pueda significar $q = 1/p$ y tampoco está claro en qué sentido converge la serie de potencias dada por (1). Por tanto, deberíamos preguntamos cuál es la razón por la que, sin embargo, este método nos proporciona una respuesta correcta.

A Wiener le pidieron que encontrase una explicación del HOC que fuese satisfactoria desde un punto de vista matemático. En su artículo de 1926 [30], Wiener describía esta cuestión del siguiente modo:

El problema de obtener una interpretación rigurosa del cálculo operacional de Heaviside (...) *est á aún abierto. Existen varios caminos que parecen llevar a este objetivo. Junto con la teoría de núcleos permutables de Volterra*
y
la teoría de transformaciones de Pincherle, la transformada de Laplace
y la integral de Fourier parecen ser herramientas prometedoras. Sin embargo, al igual que la teoría de Pincherle, la teoría de la transformada de Laplace es aplicable directamente sólo a las funciones analíticas. La integral de Fourier, que puede tratarse como derivada de una forma compleja de la tmnsformada de Laplace, no está sujeta a esta objeción. Por otra parte, las funciones a las que se puede aplicar- la forma clásica de la integral de Fourier, están sujetas a restricciones muy severas en su comportamiento en el infinito.

Wiener estaba convencido de que un uso adecuado del análisis de Fourier proporcionaría una solución al problema. La razón fundamental que le conducía a esta conclusión es que el HOC hace un uso extensivo de los operadores de la forma $f(\frac{d}{dt}) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{d^k}{dt^k}$
, donde $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$
 es una serie de potencias, y éstos satisfacen el siguiente resultado técnico:

Lema 2.1. *Sean* $g(t) = e^{iwt}$ *y* $f(t) = e^{i\alpha t}$*. Entonces* $L = g(\frac{d}{dt}$
) satisface la fórmula:

$L(f) = f(\boldsymbol{i}w)\, f(t) = g(\boldsymbol{i}\alpha)\, f(t)$

Demostración. Por definición, $L = g(\frac{d}{dt}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{i}w)^k}{k!} \frac{d^k}{dt^k}$

, de modo que

$$\begin{aligned} L(f) &= \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{i}w)^k}{k!} (\mathbf{i}\alpha)^k\right] f(t) = g(\mathbf{i}\alpha) f(t) \\ &= \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{i}\alpha)^k}{k!} (\mathbf{i}w)^k\right] f(t) \\ &= f(\mathbf{i}w) f(t), \end{aligned}$$

lo que concluye la prueba.

Wiener explicaba en su artículo la importancia de esta propiedad del siguiente modo:

Cuando se aplica a la función e^{nit}, el operador f(d/dt) es equivalente al multiplicador. El resultado de aplicar un operador dado a una integral de Fourier-dada puede ser, por tanto, concebido de manera natuml como la multiplicación de cada término de la forma e
nit
en la integral por un multiplicador que solamente depende de n. Esto es, el operador d/dt no tiene una localización particular en el dominio complejo sino que recorre hacia arriba y abajo todo el eje imaginario. Así pues, resulta demasiado ambicioso pensar que, en general, cualquier desarrollo en serie u otra representación analítica arbitraria de
f
tendrá el efecto de que f(d/dt) converge al ser aplicado a una función arbitraria.

En este artículo se adopta la estrategia de disectar una función en un número finito o infinito de rangos de frecuencia y aplicar en cada rango la expansión concreta del operador que produzca resultados convergentes sobre ese rango.

Es gracias a este método de disección que las series asintóticas de Heaviside son justificadas.

Las ideas que acabamos de mostrar fueron fundamentales para que Wiener se lanzase a la creación de un nuevo análisis de Fourier, al que bautizaría como "análisis de Fourier generalizado" (GHA en lo sucesivo), que sería aplicable a funciones muy generales. En particular, se trataba de construir un proceso de análisis-síntesis de funciones aperiódicas que no decaen en el infinito. Una motivación muy poderosa para el estudio de esta cuestión radicaba en el hecho de que este tipo de funciones, para las que el análisis armónico clásico no es aplicable, aparecen en numerosos contextos de la física.

Las dos teorías del análisis armónico, formadas por las series de Fourier clásicas y la teoría de Plancherel, no abarcan todas las posibilidades del análisis armónico. Las series de Fourier se restrin-gen a la clase muy especial de las funciones periódicas, mientras que la teoría de Plancherel se restringe a estudiar funciones que son de cuadrado sumable y, por tanto, tienden en media a
cero
cuando
su ar
gumento tiende a infinito. Ninguna de estas teorías es apropiada para el tratamiento de un rayo de luz blanca, que se supone perdura por un tiempo ilimitado. Sin embargo, los físicos que se enfrentaron por primera vez al pmblema de descomponer la luz blanca en sus componentes se vieron forzados a utilizar una u otra de estas herramientas ...

En su artículo de 1926 Wiener también inició el estudio de los operadores entre espacios de funciones, ya que éstos eran una herramienta básica para el HOC. En particular, intro-dujo el concepto de operador causal (o, con la terminología original, operador retrospec-tivo), lo cual le permitió la demostración de varios resultados interesantes. El operador *L* se dice "causal" si y solo si para todo número real
t
se tiene que, si
en-tonces *L(f)(t) = L(g)(t).* Estos operadores son muy importantes en la ingeniería, porque modelan los sistemas que son realizables en tiempo real y, con una mínima variación, sirven para describir todos los sistemas lineales que son físicamente realizables. Wiener los investigó con insistencia en las décadas de 1920 y 1930 y, finalmente, demostró algunos resultados fundamentales sobre ellos. En particular, demostró, con la ayuda de su alumno de doctorado Lee [18] que todo sistema físicamente realizable es, de hecho, realizable en el metal. Esto significa que fueron capaces de construir una red eléctrica, posteriormente bautizada con el nombre de "red de Lee- Wiener", que aproxima el comportamiento de cualquier operador físicamente realizable con precisión arbitraria. Es más, Wiener y Lee crearon una patente para los derechos de explotación de esta red en Estados Unidos y luego se la vendieron a la

compañía telefónica AT&T [35]. Creían que la AT&T usaría su invento y les daría fama, por lo que acordaron un precio muy a la baja. Sin embargo, la compañía sólo quería disponer de la patente para guardarla en un cajón y, de ese modo, evitar que otros pudieran utilizar la red de Lee-Wiener en sus inventos, lo cual suprimía la posibilidad de una verdadera competencia. Wiener se sintió terriblemente frustrado por estos hechos, lo cual le llevó a odiar amargamente a la AT&T, a arremeter contra ellos en su libro "Inventar" e incluso a escribir una novela -que intentó que se llevara al cine, pero no lo logró- que tituló "El tentador" y en la que se denunciaban este tipo de acciones por parte de las grandes compañías. Otro resultado muy importante que consiguió demostrar, con la ayuda del matemático inglés Paley, es la caracterización matemática, en el dominio de la frecuencia, de los operadores físicamente realizables, como los operadores de la forma $L(X)(\xi) = X(\xi)H(\xi)$ para los que $H(\xi) \in L^2()$ y

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\log|H(\xi)||}{1+\xi^2}\, d\xi < \infty.$$

Evidentemente, este resultado es de enorme profundidad. Wiener estaba tan orgulloso de haberlo probado que lo mencionó de forma reiterada en sus escritos matemáticos y biográficos. Por ejemplo, en [33, p. 37] afirmaba:

Este resultado es parte fundamental para la teoría de filtros. Establece que, en todo circuito eléctrico, sea cual sea éste, la atenuación, tornada como función de la frecuencia w y dividida por $1+w^2$*, define una función de la frecuencia que es absolutamente integmble. Esto es consecuencia del hecho de que la atenuación es el logaritmo del valor absoluto de la transformada de Fourier- de la respuesta al im-pulso unidad* $f(t)$*, la cual se anula para valores negativos de t; o, en otras palabras, porque ninguna red eléctrica puede predecir- estrictamente el futuro. Así pues, ningún filtro físicamente realizable puede tener- una atenuación infinita en una banda finita de frecuencias. El filtro perfecto es físicamente irrealizable por su* *propia naturaleza, no simplemente por lo inapropiado de los medios que tenemos a nuestra dis-posición. Ningún instrumento que actúe solamente sobre el pasado posee una capacidad de discriminación lo suficientemente fina como para separar una frecuencia de otra con absoluta precisión.*

Y, en su autobiografía, cuando hablaba de sus investigaciones con Payley [31, p. 168], afirmaba:

Un problema interesante que atacamos conjuntamente fue establecer las condiciones precisas que res-tringen a la transformada de Fourier de una función que se anula sobre una semirecta. Este es, por sus propios méritos, un problema matemático profundo, y Paley se enfrentó a él con vigor. Pero lo que fue una ayuda para mí, aunque no resultó útil para Paley fue que se trata, esencialmente, de un problema en ingeniería eléctrica. Se sabía desde hacía muchos años que existe una cierta limitación sobre la precisión con la que un filtro de ondas eléctrico puede eliminar una determinada banda de frecuencias, aunque los físicos y los ingenieros no estaban al tanto de la base matemática profunda que existe tras esta limitación. Al resolver lo que para Paley no era más que un hermoso y difícil problema de ajedrez, completamente autocontenido, yo mostré al mismo tiempo que las limitaciones bajo las cuales estaban trabajando los ingenieros eléctricos son precisamente aquellas que imviden al futuro tener algún tipo de influencia sobre el pasado.

Como la motivación fundamental del cálculo operacional de Heaviside era su uso para la resolución de algunos problemas de la física o la ingeniería, Wiener decidió utilizar su método para resolver la que entonces se consideraba la ecuación más importante de la ingeniería eléctrica: la ecuación del telégrafo. Ésta se escribe como sigue:

$$v_{xx} = RCv_t + LCv_{tt};\ v(x, 0) = 0,\ v(0, t) = f(t).$$

Aquí, $v(x, t)$ representa el voltaje en un punto de un cable que se encuentra a distancia x del origen (el punto donde se introduce el voltaje) y en el instante de tiempo
$t.$
Así,
$f(t)$
=
$v($
0

, t)
representa el voltaje que se introduce en un extremo del cable (el origen) en el instante de tiempo
t
y nosotros estamos interesados en conocer la cantidad
v(L,
t),
donde
L
representa la longitud del cable.

Fijémonos un poco más detenidamente en esta ecuación. Evidentemente, la entrada *f(t)* de un mensaje telegráfico estándar es una función discontinua, por lo que podemos asumir, en principio, que
v(
0
,·)
es discontinua. Entonces, ¿qué significado podemos dar a las derivadas que aparecen en la ecuación del telégrafo? Sobre esta cuestión Wiener se pronunció del siguiente modo:

(...) existen casos en los que v debe ser tratada como una solución de nuestra ecuación diferencial en un sentido general aún cuando ésta no posea derivadas de todos órdenes que aparecen indicadas en la ecuación y, de hecho, aún cuando ésta no sea diferenciable de ningún orden. Es una cuestión interesante el precisar el modo en el que una función no diferenciable pueda satisfacer, en un sentido generalizado, una ecuación diferencial.

Evidentemente, el problema de proporcionar un concepto de solución para las ecuaciones diferenciales que permita tratar como soluciones de las mismas a funciones que en realidad no son derivables, era. ya un problema viejo. Piénsese por ejemplo, que podemos introducir como condición inicial para el problema de la cuerda vibrante, un pulso triangular. Estos problemas están modelados por ecuaciones diferenciales, pero admiten como condiciones iniciales funciones no derivables y, sin embargo, siempre tienen una solución física. He ahí la enorme motivación que existía, mucho antes incluso de la aparición en escena de Wiener, para resolver el problema que estamos discutiendo. Wiener, de hecho, fue capaz de proporcionar la idea apropiada para resolver estas ecuaciones "en un sentido general":

"(...) Sea G(x, y) una función positiva e *infinitamente diferenciable dentro de una cierta región polig-onal acotada R del plano XY, con la propiedad de que ella y todas sus derivadas se*

anulan en la periferia de ∂ R y que vale identicamente cero en el exterior de R. Entonces existe una función G_1 *(x, y) tal que*

$$\int\int_R (Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu)G(x,y)dxdy =$$
$$= \int\int_R u(x,y)G_1(x,y)dxdy$$

para toda función u con derivadas acotadas sumables de los primeros dos órdenes, como puede demostrarse integrando por partes. Así pues, una condición necesaria y suficiente para que u verifique la ecuación diferencial $Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = 0$ *en casi todo punto es que*

$$\int\int_R u(x,y)G_1(x,y)dxdy = 0$$

para toda función G_1*(x, y) (pues las funciones* G *forman un sistema completo sobre cualquier región), y que posea las derivadas requeridas. Podemos, por tanto, tratar las funciones que son ortogonales a todas las funciones* G_1 *como soluciones de la ecuación diferencial en un sentido generalizado."*

Así, el artículo de 1926 fue también importante porque en él Wiener introdujo un con-cepto de "solución generalizada" de una ecuación en derivadas parciales que, en términos modernos, es exactamente el mismo que el concepto de "solución débil" pma estas ccua-ciones, Podemos, pues, afirmar que Wiener introdujo las distribuciones (en el sentido de Schwartz) ¡con dos décadas de antelación! No hace falta añadir que Wiener demostró que la solución que él obtenía para la ecuación del telégrafo en base al uso de su versión depurada del cálculo operacional de Heaviside, era de hecho una solución generalizada (o solución débil, con la terminología actual) de dicha ecuación.

2.2. Análisis armónico generalizado y teoremas Tauberianos. El éxito obtenido con su trabajo en el cálculo operacional de Heaviside, así como el estudio de algunos fenómenos físicos, como la luz blanca, supusieron una fuerte motivación para que Wiener se lanzara a lo que entonces parecía una empresa imposible: ampliar el abanico de funciones a las que es posible aplicar el análisis armónico. En particular, introdujo el conjunto **S** de las funciones *f* : $\to \mathbb{C}$ que son medibles en el sentido de Lebesgue y cuya función de covarianza,

$$\phi(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t+s)\overline{f(s)}ds,$$

está bien definida para todo $t \in \mathbb{R}$ y, además, satisface que $\Phi \in$ **C**($\mathbb{R}$).

Este conjunto de funciones, que desde entonces se ha bautizado como la clase de Wiener, es lo suficientemente amplio como para abarcar el estudio de todos los procesos físicos y los contextos matemáticos en los que Wiener estaba interesado. En particular, permite el estudio de la luz blanca, la clase de Bohr-Besicovitch de funciones casi-periódicas, y las funciones muestrales asociadas a numerosos procesos estocásticos (incluyendo el movimiento Browniano idealizado, o proceso de Wiener).

Desde una perspectiva meramente matemática, las funciones de covarianza son intere-santes porque, cuando las calculamos a partir de un polinomio trigonométrico *f(t) =* $\sum_{k=0}^{n} a_k e^{i\lambda_k t}$ *,* obtenemos que

$$\phi(t) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t+s)\overline{f(s)}ds = \sum_{k=0}^{n} |a_k|^2 e^{i\lambda_k t},$$

, lo cual implica que $\Phi(t)$ es continua en el origen si y sólo si es... Además, en todo punto de la

$$\phi(0) = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|\ldots$$

la cual garantiza que, desde el punto de vista de la norma energía, existe el siguiente límite:

$$\mathcal{W}(f)(\xi) = \lim_{A\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-A}^{-1}+\int_{1}^{A}\right]\frac{f(t)e^{-i\xi t}}{-it}dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1}\frac{f(t)(1-e^{-i\xi t})}{it}dt.$$

es su transformada $\mathcal{W}(f)$

$$\phi(t) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty}|\mathcal{W}(f)(w+\varepsilon)-\mathcal{W}(f)(w-\varepsilon)|^2 e^{iwt}dw$$

, variación acotada y

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\xi}d\Lambda(\xi)$$

expresión. Además, $\Lambda(\xi)$ se puede recuperar a partir de la función de covarianza gracias a la

$$\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-A}^{-1}+\int_{1}^{A}\right]\frac{\phi(t)e^{-i\xi t}}{-it}dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1}\frac{\phi(t)(1-e^{-i\xi t})}{it}dt = \Lambda(\xi)+cte.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|f(t)|^2}{1+t^2}\ldots$$

$\mathcal{W}(f)$ además, satisface que

donde tanto la transformada de Fourier $\mathcal{F}$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(t)|^2dt = \lim_{h\to 0}\frac{1}{4\pi h}\int_{-\infty}^{\infty}|\mathcal{W}(f)(\xi+h)-\mathcal{W}(f)(\xi-h)|^2d\xi$$

... la demostración del teorema se

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}g(t)dt = \lim_{h\to 0}\frac{2}{\pi h}\int_{0}^{\infty}g(t)\frac{\sin^2(ht)}{t^2}dt,$$

... de realizar el cambio de variables $x = e^{-s}$, y

$$\int_{0}^{\infty}\phi(\frac{x}{y})\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}\phi(e^{t-s})\varphi(e^{-s})e^{-s}ds = \int_{-\infty}^{\infty}f(t-s)g(s)ds.$$

$f \in L^\infty(\mathbb{R})$ y $g \in L^1(\mathbb{R})$. Si existe una función $g_0 \in L^1(\mathbb{R})$ tal que su transformada de Fourier $G_0 = \mathcal{F}(g_0)$ *satisface $G_0(\xi) \neq 0$ para todo $\xi \in \mathbb{R}$ y existe el límite*

(3)

$$\lim_{t\to\infty}(g_0 * f)(t) = A\int_{-\infty}^{\infty}g_0(s)ds,$$

entonces el límite $\lim_{t\to\infty}(g*f)(t)$ también existe y, además, satisface (con la misma constante A) la igualdad

(4)

$$\lim_{t\to\infty}(g*f)(t) = A\int_{-\infty}^{\infty}g(s)ds.$$

Además, si la función $g_0(t)$ satisface $\int_{-\infty}^{\infty}g(s)ds \neq 0$ *y para todo par de funciones $f \in L^\infty(\mathbb{R})$, $g \in L^1(\mathbb{R})$ se tiene que* (3) *implica* (4), *entonces la transformada de Fourier de g_0 satisface $\mathcal{F}(g_0)(\xi) \neq 0$ para todo $\xi \in \mathbb{R}$.*

Wiener demostró, además, una versión del teorema anterior adaptada al uso de convolu-ciones con medidas,

$$(g*\eta)(t) = \int_{-\infty}^{\infty}g(t-s)\eta(ds)$$

$\mathbb{R}$, y denotemos por $\{c_k(f)\}_{k=-\infty}^{\infty}$ a la sucesión de los coeficientes de Fourier f. Entonces $\{c_k(f)\}_{k=-\infty}^{\infty}$ $\in$ l^1($\mathbb{Z}$) si y solo si $\{c_k(1/f)\}_{k=-\infty}^{\infty}$ $\in$ l^1($\mathbb{Z}$

[illegible]

$\in$ l^1($\mathbb{Z}$

[illegible]