Brahmagupta vivió durante el siglo VI de nuestra era. Su obra más importante es *Brama Sputa Siddhanta* (*El sistema revisado de Brama*), un texto de astronomía que contiene varios capítulos sobre matemáticas. En otro trabajo astronómico, titulado *Khanda Khadyaka*, se encuentran dispersos algunos desarrollos trigonométricos de interés.

Los números negativos

En la obra de Brahmagupta aparece sistematizado, por primera vez en la historia, el cálculo con números negativos y el cero. Los griegos tuvieron una idea del vacío, pero no lo llegaron a tratar como un número. Y la regla de los signos, aunque subyacente en algunas fórmulas sobre productos de restas, nunca había sido enunciada explícitamente:

Positivo dividido por positivo, o negativo por negativo es positivo. Cero dividido por cero es nada. Positivo dividido por negativo es negativo. Negativo dividido por positivo es negativo. Positivo o negativo dividido por cero es una fracción que tiene al cero por denominador

A la luz de este texto se puede ver que para Brahmagupta 0/0 = 0. Sobre el significado de $a/0$ (para un número $a \neq 0$) no se atreve a pronunciarse.

Las ecuaciones de segundo grado

Las aportaciones más importantes de Brahmagupta están en el campo del álgebra. Para las ecuaciones cuadráticas da soluciones generales, proporcionando las dos raíces, sin desechar las negativas. La regla para resolver la ecuación $ax^2 + c = bx$ la enuncia así:

Deja el número en un lado y en el otro el cuadrado de la incógnita menos la incógnita. Multiplica el número por cuatro veces el coeficiente del cuadrado, súmalo al cuadrado del coeficiente del término medio, y la raíz de esto menos el coeficiente del término medio dividido por dos veces el coeficiente del cuadrado es la incógnita.

Para aplicar esta regla a la ecuación $x^2 - 10x = -9$ va haciendo los cálculos del siguiente modo: $4(-9) = -36$, $-36 + 100 = 64$, $\sqrt{64} = 8$, $8 - (-10) = 18$ y $18/2 = 9$.

El teorema chino de los restos

Dos números enteros a y b son congruentes respecto de otro entero m si su diferencia es múltiplo de m (o si dan idéntico resto al ser divididos entre

m). Esto se escribe así: $a \equiv b$ (mod m). El menor número congruente con a respecto de m se llama el resto de a en relación a m, y es justamente el resto de dividir a por m. Las congruencias mantienen las operaciones aritméticas, de modo que si $a \equiv b$ (mod m) y $c \equiv d$ (mod m), entonces $a + c \equiv b + d$ (mod m) y $ac \equiv bd$ (mod

m). La idea de número congruente no fue claramente definida hasta el siglo XVIII, pero fue utilizado desde mucho antes. Supongamos ahora que tenemos dos series de números enteros $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y $m_1, m_2, \ldots, m_n$, y que queremos encontrar un número x para el cual se cumpla lo siguiente:

$x \equiv a_1 \pmod{m_1}$
$x \equiv a_2 \pmod{m_2}$
....
$x \equiv a_n \pmod{m_n}$

El llamado *teorema chino de los restos*, afirma que la condición necesaria y suficiente para que el número buscado exista consiste en que $a_i \equiv a_j \pmod{m_{ij}}$, siempre que $i \neq j$, y siendo m_{ij} el máximo común divisor de m_i

y
m
j
.

En el *Brama Sputa Siddhanta* se encuentra el siguiente problema que es un caso particular del teorema chino:

Tenemos una cesta de huevos. Si los cogemos de dos en dos, sobra uno, si de tres en tres, sobran dos, si de cuatro en cuatro, sobran tres, si de cinco en cinco, sobran cuatro, si de seis en seis, sobran cinco, y si los cogemos de siete en siete, no sobra ninguno. ¿Cuál es el mínimo número de huevos que puede haber en la cesta?

Si x es el número de huevos, tenemos la siguiente colección de ecuaciones:

$x = 2y + 1$

x

$x = 3z + 2$

x

$x = 4u + 3$

x

El problema se resuelve aplicando sucesivamente el método de Aryabhata, y se llega de este modo a la solución más pequeña posible, que es 119. En el lenguaje de los números congruentes, el problema puede ahora ser formulado de esta manera:

$x \equiv 1 \pmod 2$ $\quad$ $x \equiv 4 \pmod 5$

$x \equiv 2 \pmod 3$ $\quad$ $x \equiv 5 \pmod 6$

$x \equiv 3 \pmod 4$ $\quad$ $x \equiv 0 \pmod 7$

Es fácil comprobar que cumple las hipótesis del teorema chino. Así que, antes de resolverlo, ya se sabe que tiene solución.

La ecuación de Pell

Entre los problemas indeterminados que aparecen en la obra de Brahmagupta ocupa un importante lugar la ecuación que la posteridad llamaría *ecuación de Pell*:

$x^2 - Dy^2 = 1$

Si $D = d^2$, no hay soluciones (salvo $x = 1$ e $y = 0$): si $D = d^2$, resultaría que $(x + dy)(x - dy) = 1$, y esto es imposible. Pero si D no es un cuadrado, hay infinitas. Y es fácil encontrar las más sencillas por tanteo. Brahmagupta dio con un camino para, a partir de dos soluciones, fabricar una tercera. Este método (que en sánscrito se denomina *samasa*) es el siguiente: si los pares de números (α, β) y (χ, δ) son soluciones, también lo es el par de números calculados de la siguiente manera:

$\sigma = \alpha\chi + \beta\delta D$
$\omega = \alpha\delta + \beta\chi$

Que esto es así es algo de muy simple comprobación. Sea, por ejemplo, la ecuación:

$x^2 - 8y^2 = 1$

Fácilmente se llega a la solución (3,1). Compuesta consigo misma, tenemos otra solución (17,6), y componiendo las dos, una tercera (99,35). Y así sucesivamente.

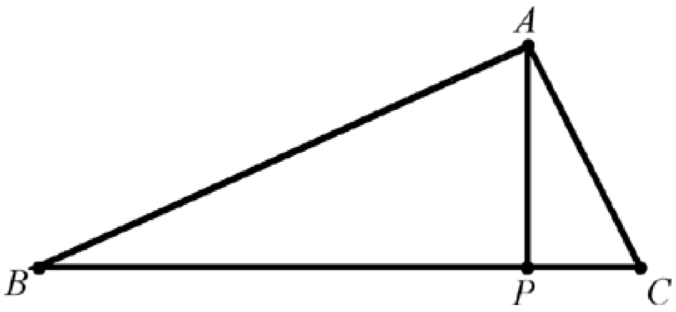
Triángulos racionales

Un triángulos cuyos lados y cuya superficie son números racionales (y en consecuencia también sus alturas) se llama *triángulo racional*. Brahmagupta tiene la siguiente aportación sobre triángulos racionales. Si los lados de un triángulo son:

$$a = \frac{1}{2}\left(\frac{p^2}{q} - q\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{p^2}{r} - r\right) \qquad b = \frac{1}{2}\left(\frac{p^2}{q} + q\right) \qquad c = \frac{1}{2}\left(\frac{p^2}{r} + r\right)$$

entonces es racional, resultado de yuxtaponer dos triángulos rectángulos con un cateto común de longitud p (ver la figura que aparece a continuación): $AP = p$, $AC = b$, $AB = c$, $PB = c - r$ y $PC = b - q$

.



El cuadrilátero cíclico

Por tres puntos no alineados siempre pasa una circunferencia. Por cuatro puntos no siempre sucede así. Por esta razón no todo cuadrilátero tiene una circunferencia circunscrita. Los que sí la tienen se llaman *cíclicos*. Sobre ellos descubrió Brahmagupta un hermoso teorema que pasamos a describir.

Llamamos fórmula de Herón a la expresión del área de un triángulo en función de sus lados. Si éstos son *a*, *b* y *c*, y $p = (a+b+c)/2$ es el semiperímetro, la superficie es:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Esta fórmula ha sido muy utilizada por agrimensores y topógrafos, porque no necesita buscar la altura del triángulo, cosa que en terreno abierto no siempre es fácil. Brahmagupta encontró una fórmula que amplía la de Herón a cuadriláteros cíclicos. Si *a*, *b*, *c* y *d* son los lados del cuadrilátero y *p* es el semiperímetro, la superficie es:

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

Si d = 0 sale la fórmula de Herón. Pero ignoramos (los textos sánscritos son muy oscuros) si Brahmagupta sabía que su teorema no era válido para cualquier cuadrilátero.

Bibliografía

- DICKSON, L. E. (1971), *History of de theory of numbers*, Chelsea Publishing company, New York.
- GERICKE, H. (1984), *Mathematik in Antike Orient*, Springer-Verlag, Berlín.
- GHEVERGHESE, G. (1996), *La cresta del pavo real*, Ediciones Pirámide, Madrid.
- MORENO, R. (2011), *Aryabhata, Brahmagupta y Bhaskara, tres matemáticos de la India*, Editorial Nivola, Madrid.
- ORE, O. (1988), *Number Theory and its History*, Dover Publications, New York.
- VAN DER WAERDEN, B. L. (1983), *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations,* Springer-Verlag, Berlín.