

3. (Octubre 2008) La percepción tridimensional

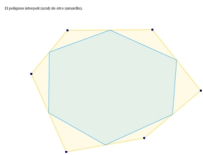
Escrito por G4D (José Manuel Arranz, Rafael Losada, José Antonio Mora y Manuel Sada)
Miércoles 01 de Octubre de 2008 17:38

Introducción

La geometría sintética manifiesta su belleza en las relaciones de orden, simetría o regularidad que aparecen en sus construcciones. Pero además, desde la Antigua Grecia, ofrece brillantes ejemplos de cómo aprovechar al máximo recursos relativamente sencillos, ese otro tipo de “belleza” más abstracta e inherente al mundo matemático.

En este artículo usaremos herramientas muy sencillas. Prácticamente, sólo emplearemos un concepto, la semejanza, y un procedimiento, el teorema de Tales. Veremos que con estas simples herramientas podremos ahondar considerablemente en el problema que nos servirá de ejemplo.

En la primera parte del [artículo anterior](#) hablábamos de “polígonos generados al unir los puntos medios de otro polígono”. Debido a lo molesto que resultaría repetir constantemente esta descripción, hemos inventado el término **interpoli** para referirnos al polígono así creado a partir de otro. Pues bien, mostrábamos en ese artículo cómo una precipitada generalización de la regularidad observada en la proporción de las áreas de un polígono y su interpoli puede conducir a inferir “leyes” falsas. Ahora, en vez de frustrarnos, retomaremos nuestro fracaso para darle la vuelta al problema y alcanzar un resultado general válido.



Pulsa

sobre la imagen para interactuar con

ella

3. (Octubre 2008) La percepción tridimensional

Escrito por G4D (José Manuel Arranz, Rafael Losada, José Antonio Mora y Manuel Sada)
Miércoles 01 de Octubre de 2008 17:38

Antes de comenzar

En todo el texto consideraremos los polígonos (trapeacios, cuadriláteros, pentágonos, etc.) en el sentido de “polígono simple” o “polígono no cruzado”, es decir, como polígonos en donde no se interseca ningún par de lados no consecutivos.

Prueba a mover el vértice libre hasta intersecar dos lados.

POLÍGONO SIMPLE (los que usaremos)



sobre la imagen para interactuar

con ella

Dando la vuelta a la tortilla

Recordemos la conjetura fallida. El interpoli de un triángulo guarda una razón constante de $1/4$ respecto al área original. Lo mismo ocurre, con razón $1/2$, en los cuadriláteros. Surge la tentación de generalizar esta constancia pero, al pasar al pentágono u otro polígono de más lados, la razón ya no se mantiene constante.

3. (Octubre 2008) La percepción tridimensional

Escrito por G4D (José Manuel Arranz, Rafael Losada, José Antonio Mora y Manuel Sada)
Miércoles 01 de Octubre de 2008 17:38

Podemos aprovechar la precipitada generalización anterior, una vez hemos comprobado que “no marcha”, para plantear el problema **al revés**

. Si elegimos un polígono al azar, parece razonable pensar que la razón de áreas entre su interpoli y el propio polígono no sea la misma para todos los polígonos con el mismo número de lados, a no ser en algunos

casos particulares como, de hecho, ya habíamos visto que son los triángulos y los cuadriláteros.

Ahora bien, ¿estos casos particulares obedecen sólo al número de lados o a otra “propiedad” desconocida? ¿Existirán “familias” de polígonos, con más de cuatro lados, que tengan esa misma propiedad y por tanto mantengan todos la misma proporción entre sus áreas y las de sus interpolis respectivos? ¿Son todos los triángulos y cuadriláteros miembros de esas familias? ¿Cuál es, si existe, esa misteriosa “propiedad”?

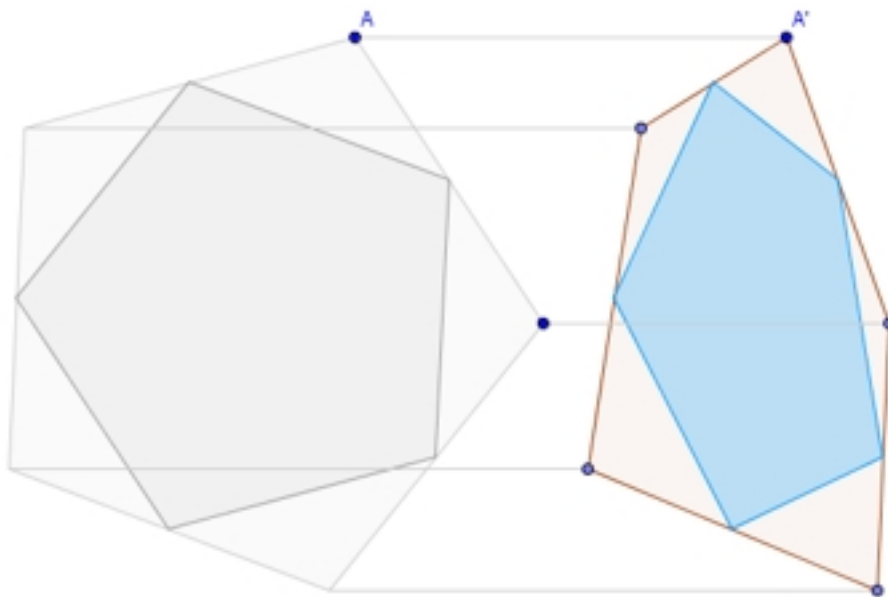
A lo largo de este artículo mostraremos que esa **propiedad** existe. Nuestro objetivo será mostrar que, dado un polígono, la propiedad que debe cumplir para mantener su área en razón constante con la de su interpoli se puede definir como:

la posibilidad de unir sus vértices mediante un haz de rectas paralelas con los de un polígono regular de igual número de lados .

En la siguiente construcción podemos ver un ejemplo. El pentágono rojo de la derecha mantiene siempre la misma razón con su interpoli azul porque sus cinco vértices se desplazan sobre un haz de rectas paralelas que lo conectan con los vértices de un pentágono regular.

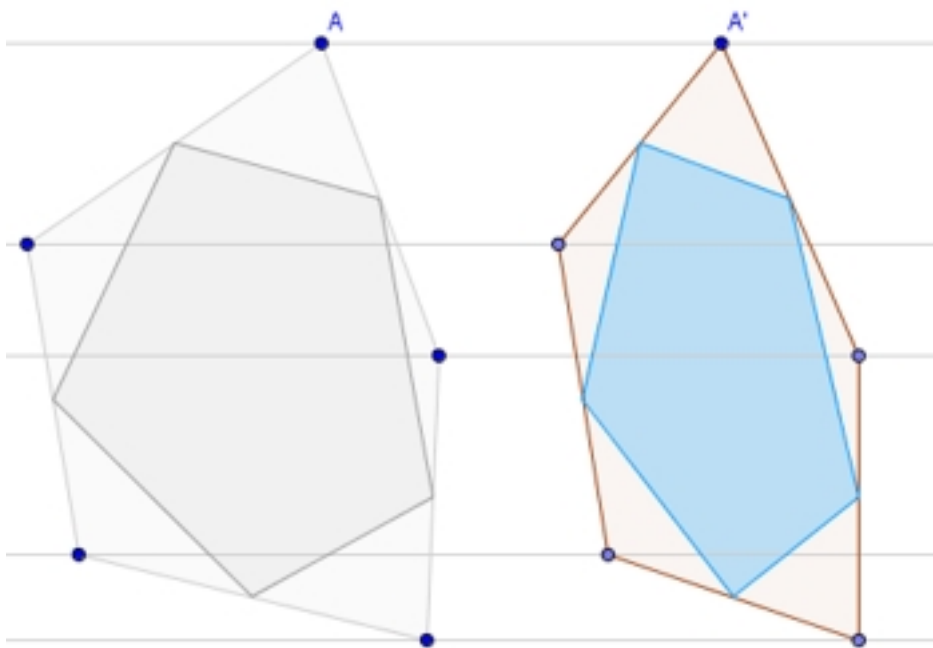
3. (Octubre 2008) La percepción tridimensional

Escrito por G4D (José Manuel Arranz, Rafael Losada, José Antonio Mora y Manuel Sada)
Miércoles 01 de Octubre de 2008 17:38



razón interpoli/poligono = 0.65451

~~El valor de la razón interpoli/poligono sobre la imagen para interpoli = 0.65451 es el valor de la razón interpoli/poligono con ella~~

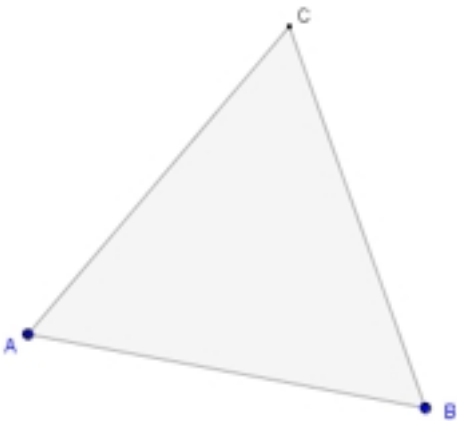


razón interpoli/poligono = 0.66011

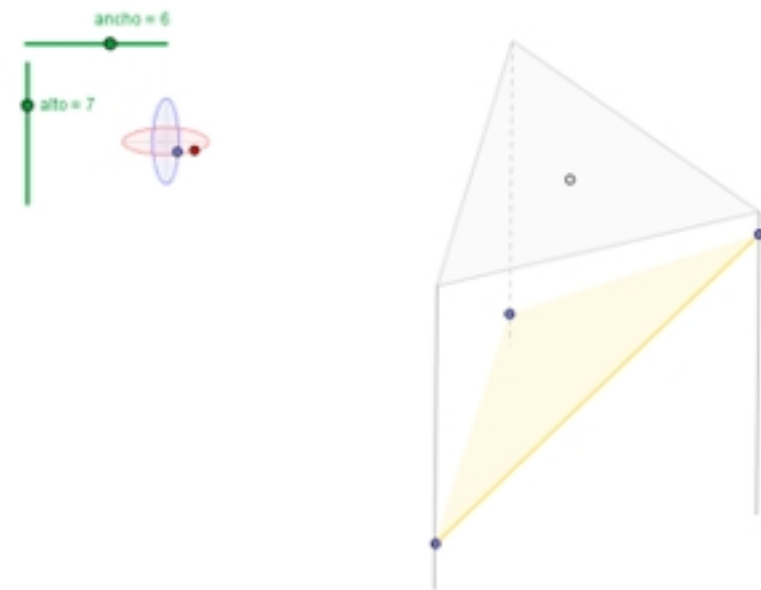
~~El valor de la razón interpoli/poligono sobre la imagen para interpoli = 0.66011 es el valor de la razón interpoli/poligono con ella~~

3. (Octubre 2008) La percepción tridimensional

Escrito por G4D (José Manuel Arranz, Rafael Losada, José Antonio Mora y Manuel Sada)
Miércoles 01 de Octubre de 2008 17:38

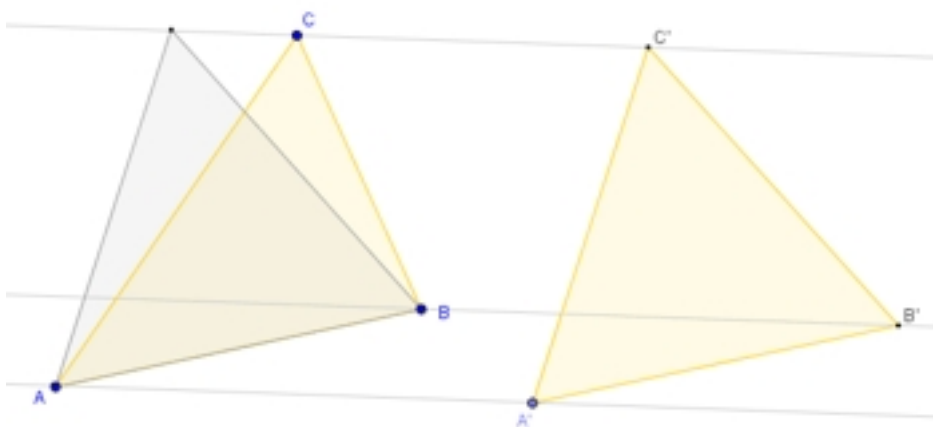


~~Substituir el texto de la imagen por el texto de la imagen. El texto de la imagen es el siguiente:~~



~~Dado cualquier triángulo ABC, construimos el triángulo equilátero sobre el lado AB. La dirección CC' determina el eje del prisma regular. Todo el prisma regular se en con ella~~

Dado cualquier triángulo ABC, construimos el triángulo equilátero sobre el lado AB. La dirección CC' determina el eje del prisma regular.

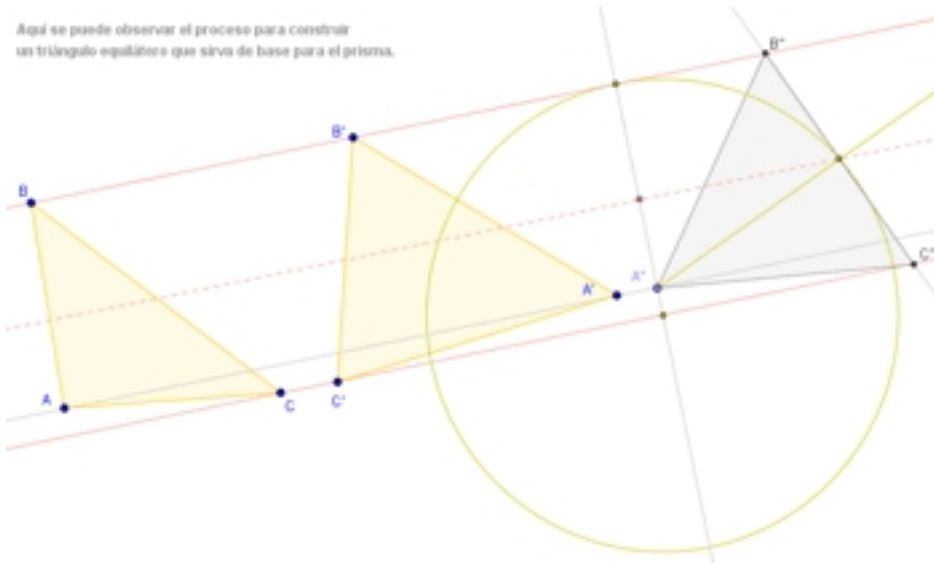


~~Substituir el texto de la imagen por el texto de la imagen. El texto de la imagen es el siguiente:~~

3. (Octubre 2008) La percepción tridimensional

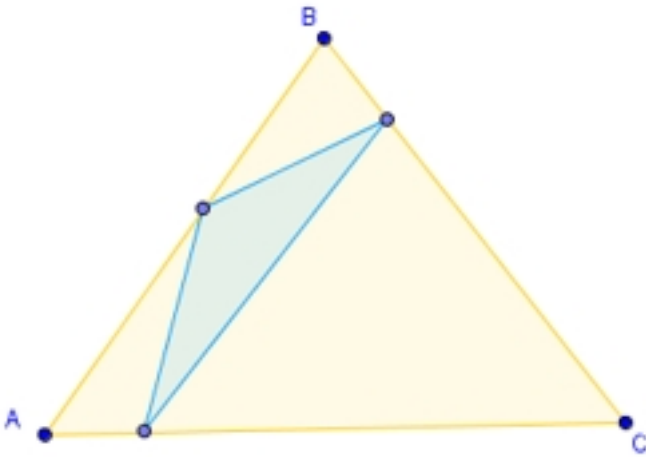
Escrito por G4D (José Manuel Arranz, Rafael Losada, José Antonio Mora y Manuel Sada)
Miércoles 01 de Octubre de 2008 17:38

Aquí se puede observar el proceso para construir un triángulo equilátero que sirva de base para el prisma.

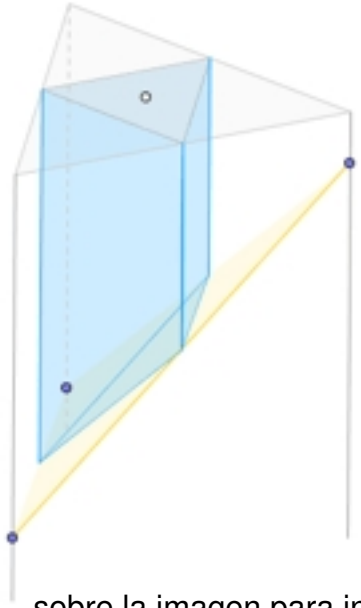
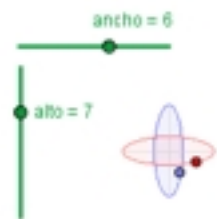


Pulsa [aquí](#) sobre la imagen para interactuar con ella

Triángulo interior, con sus vértices situados sobre los lados del triángulo exterior.



Pulsa [aquí](#) sobre la imagen para interactuar con ella



Pulsa [aquí](#)

sobre la imagen para interactuar

con ella

3. (Octubre 2008) La percepción tridimensional

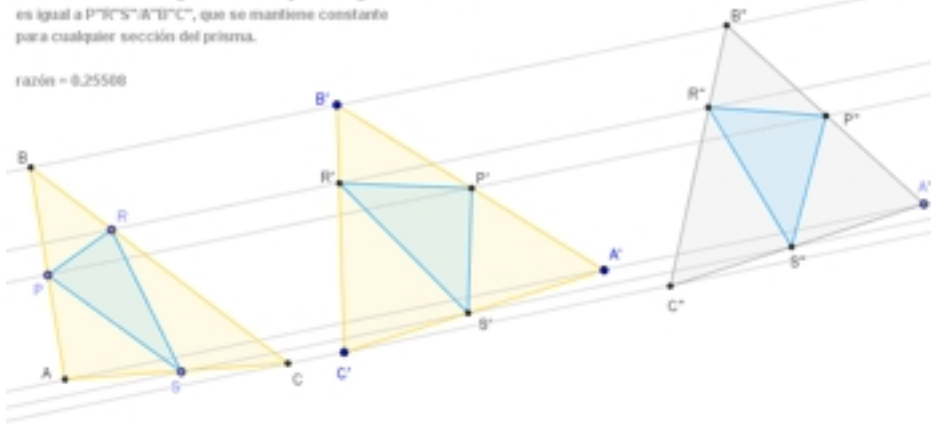
Escrito por G4D (José Manuel Arranz, Rafael Losada, José Antonio Mora y Manuel Sada)
 Miércoles 01 de Octubre de 2008 17:38

El primer triángulo que se muestra es un triángulo equilátero inscrito en la base de un prisma regular que tiene en la

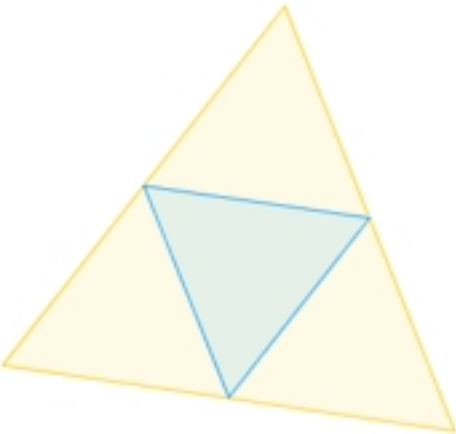
$$\frac{PRS}{ABC} = \frac{P'R'S'}{A'B'C'}$$

La razón entre los triángulos interiores y los triángulos exteriores es igual a $P'R'S'/A'B'C'$, que se mantiene constante para cualquier sección del prisma.

razón = 0.25568

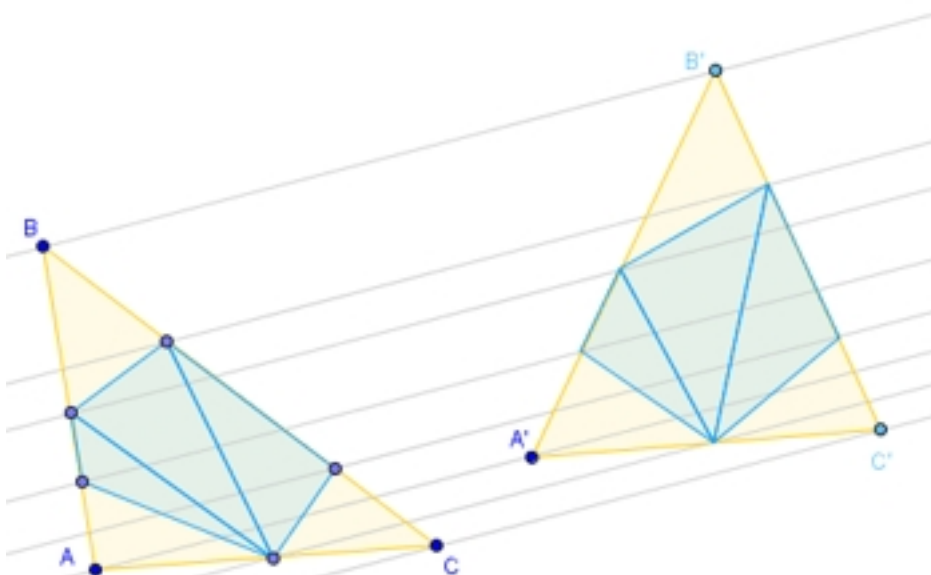


El segundo triángulo que se muestra es un triángulo equilátero inscrito en la base de un prisma regular que tiene en la



La razón entre los triángulos interiores y los triángulos exteriores es igual a $P'R'S'/A'B'C'$, que se mantiene constante para cualquier sección del prisma.

razón = 0.57173



El tercer triángulo que se muestra es un triángulo equilátero inscrito en la base de un prisma regular que tiene en la

3. (Octubre 2008) La percepción tridimensional

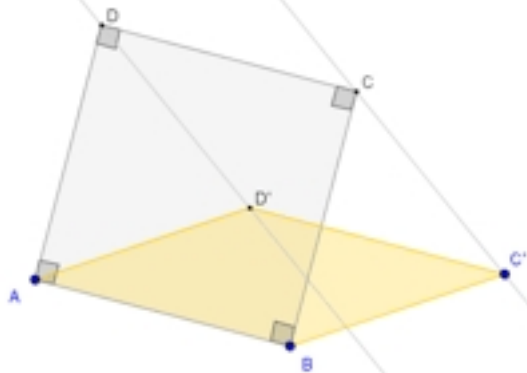
Escrito por G4D (José Manuel Arranz, Rafael Losada, José Antonio Mora y Manuel Sada)
 Miércoles 01 de Octubre de 2008 17:38

haz de rectas paralelas

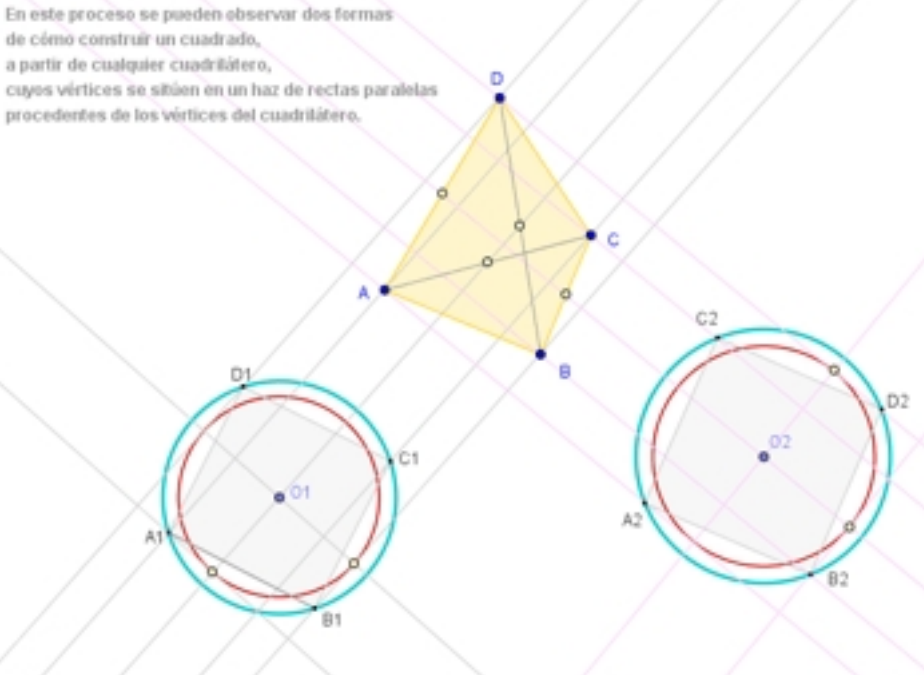
es sección de algún prisma de

Los triángulos ADO' y BCC' son congruentes.

Como $AD \parallel BC$ y $AD' \parallel BC'$, se deduce que $DD' \parallel CC'$.



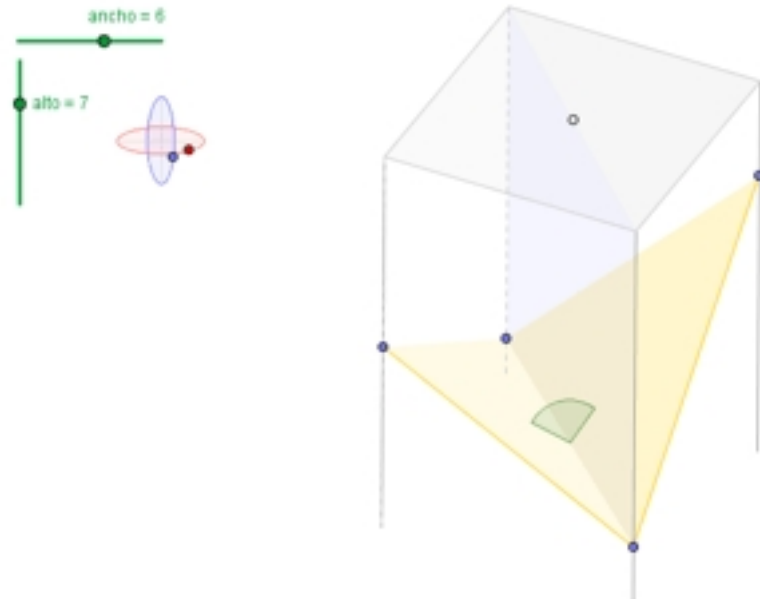
En este proceso se pueden observar dos formas de cómo construir un cuadrado, a partir de cualquier cuadrilátero, cuyos vértices se sitúan en un haz de rectas paralelas procedentes de los vértices del cuadrilátero.



En este proceso se pueden observar dos formas de cómo construir un cuadrado, a partir de cualquier cuadrilátero, cuyos vértices se sitúan en un haz de rectas paralelas procedentes de los vértices del cuadrilátero.

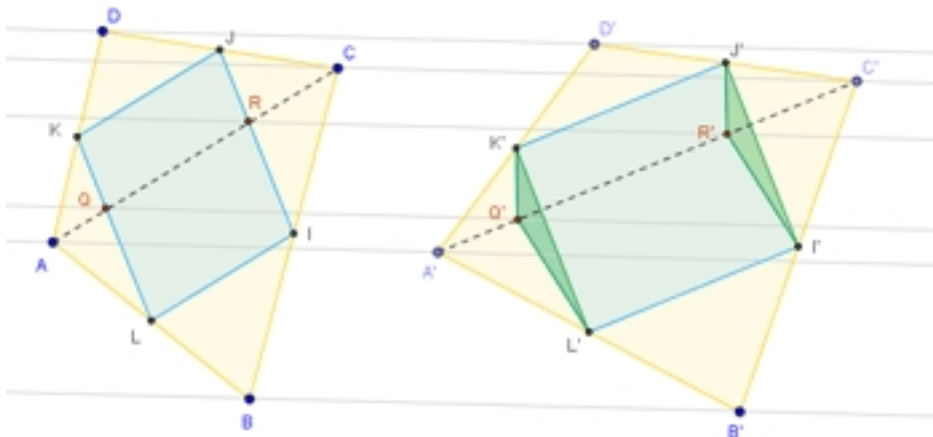
3. (Octubre 2008) La percepción tridimensional

Escrito por G4D (José Manuel Arranz, Rafael Losada, José Antonio Mora y Manuel Sada)
 Miércoles 01 de Octubre de 2008 17:38

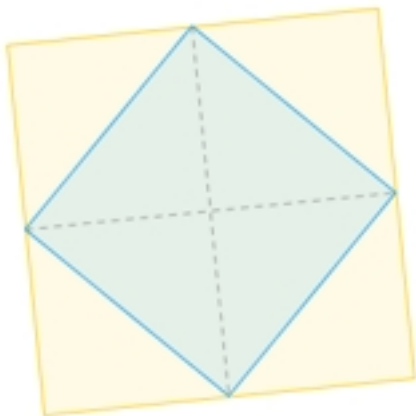


De la siguiente imagen se trata de un cubo sobre la imagen para interactuar con ella. La imagen es un cubo con un plano que lo divide en dos partes.

$$\frac{F'JKL'}{A'B'C'D'} = \frac{F'L'Q'R'}{A'B'C'D'} + \frac{Q'R'JK'}{A'B'C'D'} = \frac{ILQR}{ABCD} + \frac{QRJK}{ABCD} = \frac{IJKL}{ABCD}$$



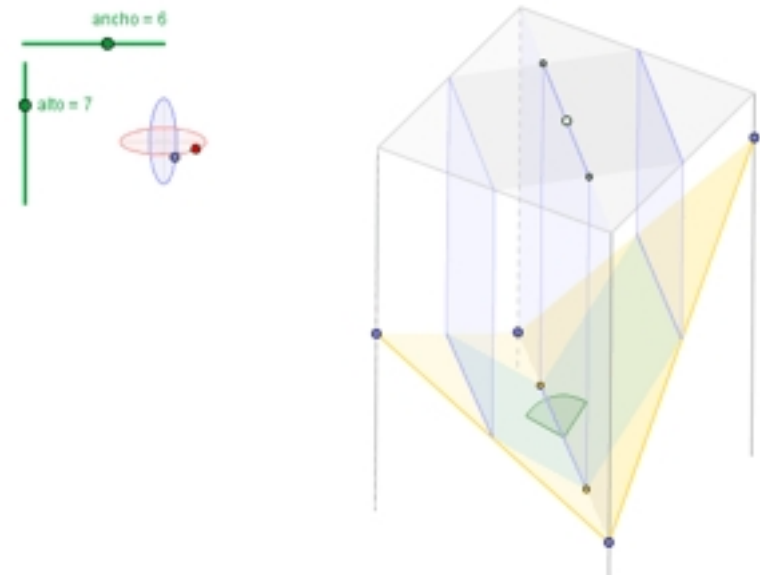
De la siguiente imagen se trata de un cubo sobre la imagen para interactuar con ella. La imagen es un cubo con un plano que lo divide en dos partes.



De la siguiente imagen se trata de un cubo sobre la imagen para interactuar con ella. La imagen es un cubo con un plano que lo divide en dos partes.

3. (Octubre 2008) La percepción tridimensional

Escrito por G4D (José Manuel Arranz, Rafael Losada, José Antonio Mora y Manuel Sada)
 Miércoles 01 de Octubre de 2008 17:38

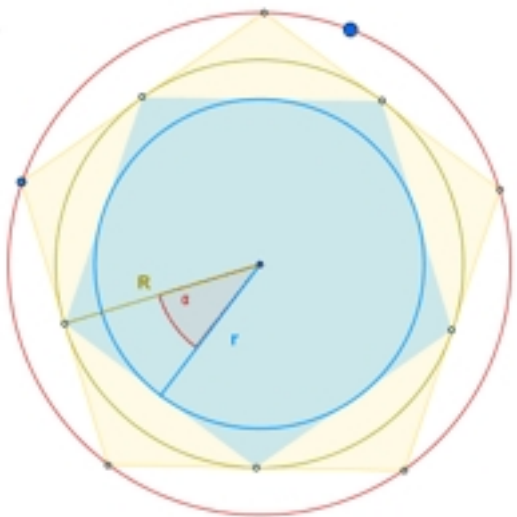


~~Publicado en el foro de la Universidad de Sevilla. En la imagen se muestra un cubo con una altura de 7 y un ancho de 6. La imagen se muestra en perspectiva, con la altura y el ancho indicados. La imagen se muestra en perspectiva, con la altura y el ancho indicados.~~

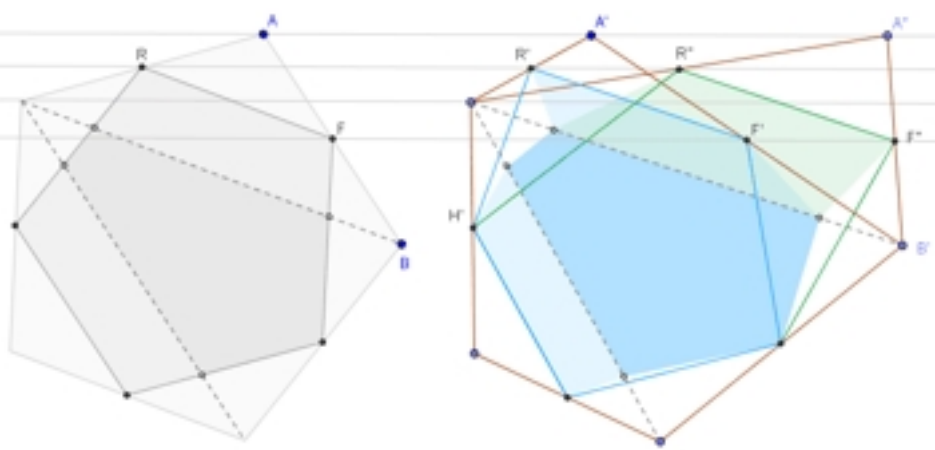
$n = 5$

La razón entre las áreas de los polígonos es la misma, por semejanza, que la razón entre las áreas de los círculos inscrito y circunscrito al interpol.

Razón = $(\pi r^2) / (\pi R^2) = (r/R)^2 =$
 $= \cos^2 \alpha = \cos^2 (180^\circ/n) = 0,65451$



~~Publicado en el foro de la Universidad de Sevilla. En la imagen se muestra un cubo con una altura de 7 y un ancho de 6. La imagen se muestra en perspectiva, con la altura y el ancho indicados. La imagen se muestra en perspectiva, con la altura y el ancho indicados.~~



~~Publicado en el foro de la Universidad de Sevilla. En la imagen se muestra un cubo con una altura de 7 y un ancho de 6. La imagen se muestra en perspectiva, con la altura y el ancho indicados. La imagen se muestra en perspectiva, con la altura y el ancho indicados.~~

3. (Octubre 2008) La percepción tridimensional

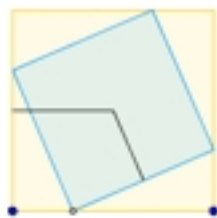
Escrito por G4D (José Manuel Arranz, Rafael Losada, José Antonio Mora y Manuel Sada)
Miércoles 01 de Octubre de 2008 17:38

$$r(n, k) = \left(\frac{\text{apotema}}{\text{Apotema}} \right)^2 = (2k - 1)^2 \sin^2(180^\circ / n) + \cos^2(180^\circ / n)$$

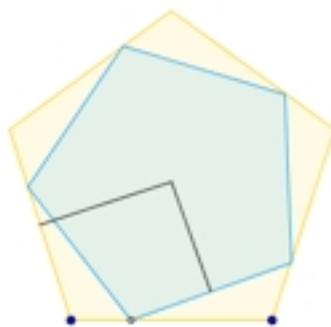
$k = 0.3$



$r(3, 0.3) = 0.37$

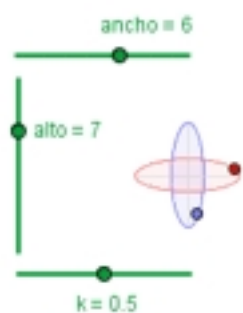


$r(4, 0.3) = 0.58$

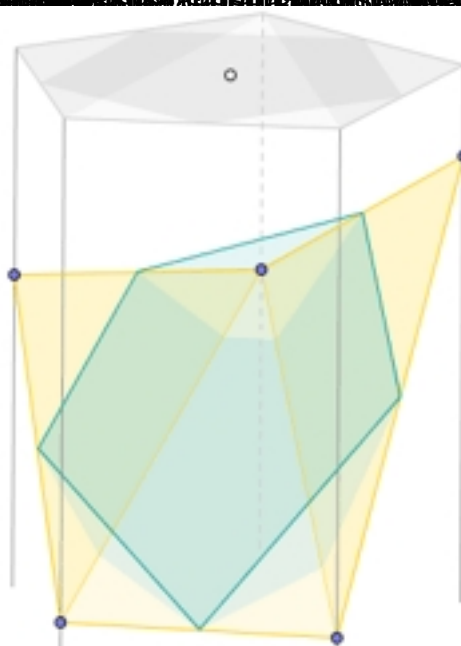


$r(5, 0.3) = 0.70979$

Pulse [aquí](#) para interactuar con ella



$r(5, 0.5) = 0.65451$



Pulse [aquí](#)

sobre la imagen para interactuar con

ella