

El problema de Freudenthal

Escrito por Marta Macho Stadler
Martes 13 de Julio de 2021 16:00

El *problema de Freudenthal* apareció publicado por primera vez en 1969, en la revista *Nieuw Archief voor Wiskunde*

, en la que el matemático

[Hans Freudenthal](#)

(1905-1990) era el redactor de la sección de ‘problemas’.

No. 223. *A* zegt tot *S* en *P*: Ik heb twee gehele getallen x, y gekozen met $1 < x < y$ en $x + y \leq 100$. Straks deel ik $s = x + y$ aan *S* alleen mee, en $p = xy$ aan *P* alleen. Deze mededelingen blijven geheim. Maar jullie moeten je inspannen om het paar (x, y) uit te rekenen.

Hij doet zoals aangekondigd. Nu volgt dit gesprek:

1. *P* zegt: Ik weet het niet.
 2. *S* zegt: Dat wist ik al.
 3. *P* zegt: Nu weet ik het.
 4. *S* zegt: Nu weet ik het ook.
- Bepaal het paar (x, y) .

(*H. Freudenthal*).

Copia de la publicación original, problema No. 223, en [1].

El problema –con la redacción adaptada, pero sin cambiar la parte matemática– dice lo siguiente:

Jesús, María y José son tres amigos. Jesús elige dos números enteros x e y , donde $1 < x < y$,
 y
 x
 $+$
 y

El problema de Freudenthal

Escrito por Marta Macho Stadler
Martes 13 de Julio de 2021 16:00

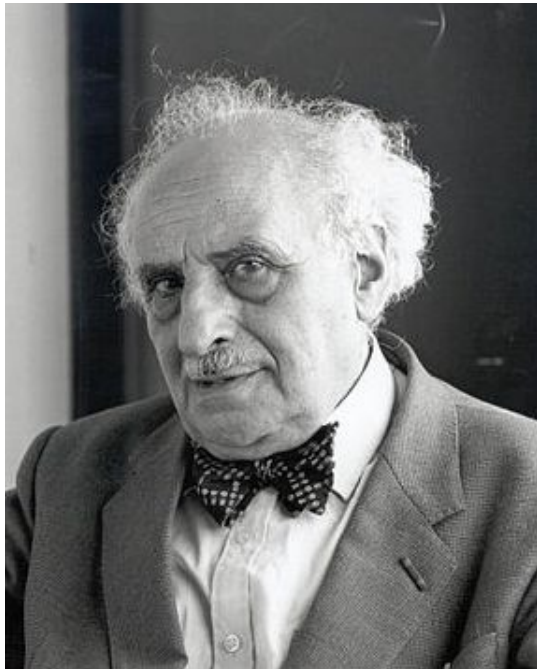
≤ 100 .

Jesús dice a María el resultado del producto $P = xy$ y a José le informa del valor de la suma $S = x + y$.

A continuación tiene lugar el siguiente diálogo:

1. María: *Desconozco los valores de x e y .*
2. José: *Ya sabía que te era imposible saber los valores de x e y .*
3. María: *Bien, ahora, ya conozco x e y .*
4. José: *Bien, ahora yo también sé sus valores.*

¿Quiénes son x e y ?



Hans Freudenthal

En [2], se discuten varias de las soluciones propuestas –muchas de ellas de conocidas

El problema de Freudenthal

Escrito por Marta Macho Stadler
Martes 13 de Julio de 2021 16:00

personas del ámbito matemático— y se da el resultado: $x = 4$ e $y = 13$.

¿Cómo se ha llegado a ello? Reproduzco el argumento utilizado (extraído de [3]) para su resolución, aunque es preciso realizar algunos cálculos (sencillos, pero largos) para llegar a ello.

A priori, hay muchos pares de números enteros que cumplen las condiciones dadas en el enunciado. Pero la frase 1. de María permite eliminar algunos (los que sólo pueden escribirse de una única manera como un producto xy). Las frases 2., 3. y 4. permiten eliminar sucesivamente todos los demás pares posibles, excepto uno de ellos.

Vamos a ir razonando poco a poco.

(i) María conoce el producto $P = xy$, pero no sabe los valores de x y de y . Eso significa que el número P posee varias posibles descomposiciones. Este es el caso, por ejemplo de $12 = 2 \times 6 = 3 \times 4$, $18 = 2 \times 9 = 3 \times 6$, y tantos otros.

Si se pasa revista a todos los posibles productos, existen 574 *productos ambiguos*, es decir, que pueden descomponerse de al menos dos maneras diferentes. Llamemos P

al conjunto de estos números
ambiguos

: el primero es 12 y el último es 2400 ($2400 = 40 \times 60 = 48 \times 50$):

$P_1 = \{12, 18, 20, 24, 28, 30, 32, 36, 40, 42, 44, 45, 48, 50, 52, 54, 56, 60, 63, 64, 66, 68, 70, 72, 75, 76, 78, 80, 84, 88, 90, 92, 96, 98, 99, 100, 102, 104, 105, 108, 110, 112, 114, 116, 117, 120, 124, 126, 128, 130, 132, 135, 136, 138, 140, 144, 147, 148, 150, 152, 153, 154, 156, 160, 162, 164, 165, 168, 170, 171, 172, 174, 175, 176, 180, 182, 184, 186, 188, 189, 190, 192, 195, 196, 198, 200, 204, 207, 208, 210, 216, 220, 222, 224, 225, 228, 230, 231, 232, 234, 238, 240, 243, 245, 246, 248, 250, 252, 255, 256, 258, 260, 261, 264, 266, 270, 272, 273, 275, 276, 279, 280, 282, 285, 286, 288, 290, 294, 296, 297, 300, 304, 306, 308, 310, 312, 315, 320, 322, 324, 325, 328, 330, 336, 340, 342, 344, 345, 348, 350, 351, 352, 357, 360, 364, 368, 370,$

El problema de Freudenthal

Escrito por Marta Macho Stadler
Martes 13 de Julio de 2021 16:00

372, 374, 375, 376, 378, 380, 384, 385, 390, 392, 396, 399, 400, 405, 406, 408, 410, 414, 416, 418, 420, 425, 429, 430, 432, 434, 435, 440, 441, 442, 444, 448, 450, 455, 456, 459, 460, 462, 464, 465, 468, 470, 475, 476, 480, 483, 486, 490, 492, 494, 495, 496, 500, 504, 506, 510, 512, 513, 516, 518, 520, 522, 525, 528, 532, 539, 540, 544, 546, 550, 552, 558, 560, 561, 564, 567, 570, 572, 574, 576, 580, 585, 588, 592, 594, 595, 598, 600, 602, 608, 609, 612, 616, 620, 621, 624, 627, 630, 637, 638, 640, 644, 646, 648, 650, 651, 656, 660, 663, 666, 672, 675, 680, 682, 684, 688, 690, 693, 696, 700, 702, 704, 714, 715, 720, 726, 728, 735, 736, 738, 740, 741, 744, 748, 750, 754, 756, 759, 760, 765, 768, 770, 774, 780, 782, 783, 784, 792, 798, 800, 806, 810, 812, 814, 816, 819, 820, 825, 828, 832, 836, 840, 850, 855, 858, 860, 864, 868, 870, 874, 880, 882, 884, 888, 891, 896, 897, 900, 902, 910, 912, 918, 920, 924, 928, 930, 935, 936, 945, 946, 950, 952, 957, 960, 962, 966, 968, 969, 972, 975, 980, 984, 986, 988, 990, 992, 1000, 1008, 1012, 1014, 1020, 1026, 1032, 1035, 1036, 1040, 1044, 1050, 1053, 1054, 1056, 1064, 1066, 1071, 1078, 1080, 1088, 1092, 1100, 1102, 1104, 1105, 1110, 1116, 1118, 1120, 1122, 1125, 1131, 1134, 1140, 1144, 1148, 1150, 1152, 1155, 1160, 1170, 1173, 1176, 1178, 1184, 1188, 1190, 1196, 1197, 1200, 1204, 1215, 1216, 1218, 1224, 1230, 1232, 1240, 1242, 1248, 1254, 1258, 1260, 1275, 1276, 1280, 1288, 1292, 1296, 1300, 1302, 1311, 1312, 1320, 1323, 1326, 1330, 1332, 1334, 1344, 1350, 1360, 1364, 1365, 1368, 1377, 1380, 1386, 1392, 1394, 1400, 1404, 1406, 1408, 1425, 1426, 1428, 1430, 1440, 1449, 1450, 1452, 1456, 1458, 1470, 1472, 1476, 1480, 1482, 1485, 1488, 1496, 1500, 1508, 1512, 1518, 1520, 1530, 1536, 1539, 1540, 1550, 1554, 1560, 1564, 1566, 1568, 1575, 1584, 1596, 1600, 1610, 1612, 1617, 1620, 1624, 1628, 1632, 1638, 1650, 1656, 1664, 1672, 1674, 1680, 1700, 1702, 1710, 1716, 1725, 1728, 1736, 1740, 1748, 1750, 1755, 1760, 1764, 1768, 1776, 1782, 1792, 1794, 1798, 1800, 1820, 1824, 1836, 1848, 1850, 1856, 1860, 1872, 1890, 1904, 1914, 1920, 1924, 1932, 1938, 1944, 1950, 1960, 1972, 1980, 1984, 2016, 2030, 2040, 2046, 2052, 2070, 2080, 2100, 2108, 2112, 2142, 2145, 2160, 2176, 2184, 2200, 2205, 2240, 2244, 2268, 2280, 2340, 2352, 2400}.

(ii) José conoce la suma $S = x + y$. Como José dice: ‘Ya sabía que te era imposible saber los valores de x e y ’, eso significa que, para

todas las maneras de descomponer

S

como suma de dos enteros,

S

$= 2 + ($

S

$-2) = 3 + ($

S

$-3), \dots$ todas dan un producto

ambiguo

, que es por lo tanto un elemento de

P

1

.

El problema de Freudenthal

Escrito por Marta Macho Stadler
Martes 13 de Julio de 2021 16:00

Ese es el caso, por ejemplo de $11 = 2+9$ que tiene como producto 18, $11 = 3+8$ de producto 24, $11 = 4+7$ de producto 28, $11 = 5+6$ de producto 30.

Estas sumas dan lugar al conjunto $S_1 = \{11, 17, 23, 27, 29, 35, 37, 41, 47, 53\}$.

(iii) María dice que, con esa información, reconoce los valores de x e y . Eso significa que entre las muchas descomposiciones de

$$P = xy$$

que son un producto

ambiguo

, sólo una da una suma

S

=

$$x+y$$

que pertenece a

S

1

. Por ejemplo, si María piensa en el producto $18 = 2 \times 9 = 3 \times 6$, constata que sólo el par (2,9) tiene una suma perteneciente a

S

1

.

Los productos *ambiguos* para los que sólo una descomposición pertenece a S_1 describen un conjunto

P_2

que se reduce a 86 elementos en vez de los 574 que contenía

P

1

:

$$P_2 = \{18, 24, 28, 50, 52, 76, \dots, 702\}.$$

(iv) José dice que también conoce los valores de los números elegidos por Jesús. Eso significa que entre las descomposiciones de la suma $S = x+y$, sólo una da como producto

El problema de Freudenthal

Escrito por Marta Macho Stadler
Martes 13 de Julio de 2021 16:00

un elemento de P_2 . Por ejemplo, $11 = 2+9 = 3+8 = 4+7 = 5+6$, da como posibles productos 18, 24, 28 y 30, y dos de esos productos pertenecen a

P

2

. En este caso, María no podría dar

x

e

y

.

Las sumas tales que una única descomposición da un producto perteneciente a P_2 se reducen al número 17; en efecto: $17 = 2+15 = 3+14 = 4+13 = 5+12 = 6+11 = 7+10 = 8+9$, cuyos productos son 30, 42, 52, 60, 66, 70 y 72, y sólo 52 está en

P

2

.

Por lo tanto, María (y nosotras y nosotros) sabe que $x+y=17$ y que $xy=52$, y por lo tanto, $x=4$ e

y

$=13$.

Visto en [Le Blog d'ABC Maths](#)

Más información:

[1] H. Freudenthal, *Nieuw Archief Voor Wiskunde*, Ser 3, 17 (1969) 152 (planteamiento del problema)

[2] H. Freudenthal, *Nieuw Archief Voor Wiskunde*, Ser 3, 18 (1970) 102-106 (solución del problema)

El problema de Freudenthal

Escrito por Marta Macho Stadler
Martes 13 de Julio de 2021 16:00

[3] [Hans Freudenthal](#) , Wikipedia (en francés)

[4] [Sum and Product Puzzle](#) , Wikipedia

[5] Jean-Paul Delahaye, [L'incroyable problème de Freudenthal](#) , Interstices, 2008

[6] Hans van Ditmarsch, Jan van Eijck, and L.C. Verbrugge, [Publieke Werken Freudenthal's Som-en-productraadsel](#) , NAW
5/10 nr. 2 juni 2009, 126-131

Artículo publicado en el blog de la Facultad de Ciencia y Tecnología (ZTF-FCT) de la Universidad del País Vasco ztfnews.wordpress.com .