

# Todo está bajo control

por

Luis Alberto Fernández Fernández, Universidad de Cantabria

## 1. Introducción

A primera vista, puede parecer que el título de este trabajo es una exageración, por ser demasiado generalista. A lo largo de estas páginas, espero convencer de su validez, mostrando que, hoy en día, en una sociedad desarrollada como la nuestra, la vida depende de los sistemas de control de manera esencial, prácticamente en todos los ámbitos. Para ello, voy a empezar por lo más cotidiano: las actividades que solemos realizar diariamente. Tras levantarnos de la cama, lo normal es pasarnos por el baño, darnos una ducha y arreglarnos. Después de desayunar, es habitual dejar resueltas las tareas domésticas del día (comida, ropa,...), sirviéndonos de las importantes ventajas que nos ofrecen los electrodomésticos actuales (como el horno, la lavadora, el lavavajillas, ...) para programarlos a nuestra conveniencia.



Figura 1: Coche con GPS.

Una vez en la calle (y salvo casos excepcionales), lo normal es tener que utilizar un medio de transporte para desplazarnos hasta nuestro puesto de estudio o trabajo (coche, autobús, tren,...). Durante el trayecto, debemos respetar los semáforos, las limitaciones de velocidad y las restricciones en la circulación que nos vayamos encontrando, para lo cual nos servimos una vez más de las comodidades que nos ofrecen los medios más sofisticados (GPS, sistema de frenos ABS, control

inteligente de velocidad, control electrónico de estabilidad,...). Y si no las respetamos, sabemos que nos arriesgamos (con una alta probabilidad) a ser multados y perder los correspondientes puntos del carnet de conducir, porque los sistemas para controlar el tráfico (radares, policía, cámaras de vigilancia,...) cada día son más frecuentes y están más perfeccionados. Una vez hemos llegado al centro de estudio (si es el caso), debemos enfrentarnos a controles periódicos (exámenes) para determinar nuestro grado de conocimiento de cada materia. En la mayoría de las empresas hay inspecciones frecuentes para controlar la calidad de los productos que elaboran o los servicios que ofrecen. En los comercios se utilizan los códigos de barras para conocer los precios y las existencias de los productos que queremos comprar. Para poder realizar cualquier tipo de operación bancaria (por simple que sea) debemos identificar las cuentas corrientes a través de su numeración (que incluye dos dígitos de control para detectar errores) y así podríamos seguir de manera indefinida con multitud de ejemplos similares. Por otro lado, existe una preocupación creciente en nuestra sociedad por la alimentación y la salud a la vez que por mejorar la imagen personal: en todas estas facetas resulta muy recomendable contar con supervisión médica que se vale de todo tipo de análisis, controles y pruebas para conocer nuestro estado actual (peso, niveles de colesterol, tensión arterial, ...) y proponernos las mejores estrategias de cara al futuro. Podemos centrarnos en cualquier otro ámbito de la vida, que encontraremos seguro multitud de ejemplos que demuestran que realmente vivimos en una **sociedad de control**: control de gestión empresarial y financiero, control de los medios de comunicación, la publicidad e Internet, control de la contaminación, control de la natalidad, control mental, control genético, mando de control (TV, calefacción,...), controles de acceso (edificios, fronteras,...), control parlamentario, control remoto (radio control, juguetes,...), control de ansiedad, control del dolor, control de armas,...

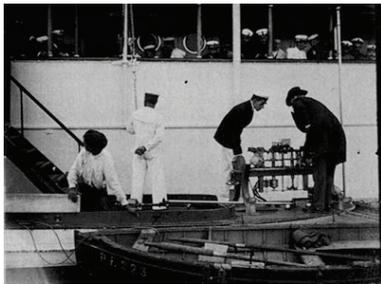


Figura 2: Presentación del Telekino.

Muchas personas piensan que este control es excesivo y que entraña riesgos importantes para el individuo (como planteó George Orwell en su famoso libro "1984" con el Gran Hermano que todo lo vigila), pero ese es un debate que se aleja de nuestros objetivos y en el que no vamos a entrar. En relación a uno de los ejemplos que acabamos de mencionar, me parece de justicia recordar aquí (por lo desconocido que es a nivel popular) que el **Telekino** (primer aparato de radiodirección

del mundo, pionero en el campo del mando a distancia) fue inventado por el ingeniero cántabro Leonardo Torres Quevedo. El 6 de septiembre de 1906, en presencia del Rey Alfonso XIII y ante una gran multitud, hizo una demostración en el puerto de Bilbao, maniobrando un bote desde la terraza del Club Marítimo del Abra. El

Telekino ha sido reconocido por la IEEE (Institute of Electrical and Electronics Engineers) en el año 2006 como **milestone**, un hito para la historia de la ingeniería a nivel mundial.

Los ejemplos anteriores (y muchos más) se pueden encuadrar en un esquema común que podemos presentar de la siguiente manera simplificada: nos interesa controlar (en algún sentido) el estado  $x$  de un cierto sistema y para ello contamos con una serie de controles  $u$  que podemos seleccionar de entre un cierto conjunto restringido de opciones admisibles  $U_{ad}$ . Normalmente, nos preocupará además hacerlo de la manera más económica o rápida posible. Como ya hemos dicho, podemos imaginar situaciones muy dispares: que el sistema sea nuestro automóvil, el estado sea su posición, los controles sean el volante, el acelerador y el freno y el objetivo llegar al trabajo en el menor tiempo posible; también que el sistema sea nuestro propio cuerpo, el estado sea nuestro peso, los controles sean la alimentación que tomamos y el ejercicio que realizamos y el objetivo sea conseguir un cierto peso ideal o que el sistema sea el horno de la cocina, con los mandos de control que disponga, el estado sea su temperatura y el objetivo conseguir tener un asado preparado para la hora que solamos llegar a comer.

La teoría matemática que se encarga de estudiar este tipo de problemas de forma sistemática se conoce como **Teoría de Control** y los objetivos principales que persigue se pueden clasificar en tres tipos:

- **Controlabilidad:** trata de estudiar en qué casos se puede conducir el estado de un sistema hacia un cierto estado deseado y cómo hacerlo.
- **Estabilización:** busca mantener el estado del sistema suficientemente cerca del estado ideal durante un intervalo de tiempo posterior, aún en presencia de pequeñas perturbaciones inesperadas.
- **Control óptimo:** se preocupa de conseguirlo minimizando costes, tiempo, distancias o cualquier otro criterio que nos interese.

## 2. Antecedentes de la Teoría de Control

Ya Aristóteles en el siglo IV a.C., en su libro “La Política”, planteaba el ideal de que “...cada instrumento pudiese, en virtud de una orden recibida o, si se quiere, adivinada, trabajar por sí mismo, ...; si las lanzaderas tejiesen por sí mismas; si el arco tocase solo la cítara, los empresarios prescindirían de los operarios y los señores de los esclavos.”

Este control automático de procesos (tan extendido en nuestros días) era un sueño entonces y se ha podido conseguir en muchos casos mediante la técnica de **realimentación** (en inglés, **feedback**). Precisamente a aquellos tiempos se remonta uno de los primeros ejemplos históricos que se citan en este campo: el reloj

de agua (clepsidra) de Ctesibios de Alejandría (siglo III a.C.), alumno aventajado de Arquímedes. Este reloj contaba con un mecanismo para que el nivel de un depósito de agua subiera con una velocidad constante, para lo cual utilizaba un flotador que regulaba la entrada de agua a un depósito auxiliar de manera que el nivel de éste se mantuviera constante y por lo tanto su caudal de salida al depósito principal, ver la Figura 3.

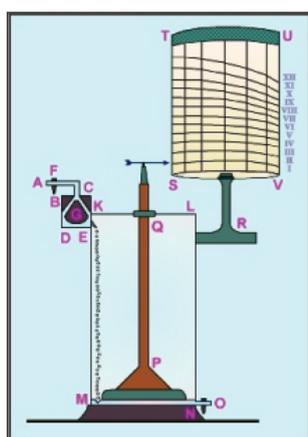


Figura 3: Clepsidra de Ctesibios.

No resulta difícil reconocer que este sistema de flotador es similar al que todavía hoy en día se utiliza en las cisternas modernas de nuestros baños para regular su llenado de agua de manera automática cada vez que se descarga y sin llegar a desbordarse. Podemos asegurar así que la cisterna es el sistema de control por realimentación más elemental que conocemos y seguimos utilizando a diario.

Variantes más o menos ingeniosas de este sistema de flotadores (junto al principio de los vasos comunicantes) fueron utilizados para diseñar por ejemplo dispensadores automáticos de vino o sistemas de apertura y cierre de las puertas de los templos, ver [3]. Muchos de estos mecanismos fueron recopilados por Herón de Alejandría (siglo

I a.C.), cuyo mayor logro personal fue la invención de la primera máquina de vapor, conocida como **eolípila**. En los siglos posteriores no se produjeron avances significativos en el campo de los mecanismos dotados con realimentación, salvo algunas mejoras en el sistema de control de los molinos para regular la cantidad de grano suministrada, dependiendo de la fuerza del viento.

Ya en el siglo XVIII, E. Lee inventó un sistema para controlar automáticamente la orientación e inclinación de las aspas de los molinos, de modo que se aprovechara mejor la dirección del viento. Fue el primer servomecanismo de posición. Thomas Mead patentó un regulador que aseguraba que la presión ejercida entre las piedras del molino fuera proporcional a la velocidad de rotación, utilizando como sensor de velocidad un péndulo rotativo, precursor de los reguladores centrífugos [3].

De manera paralela, a partir de la máquina de vapor de Herón, se fueron desarrollando diversas máquinas que trataban de usar el vapor con finalidad práctica (no meramente lúdica) y que condujeron al inicio de la Revolución Industrial. Aunque existen algunas discrepancias al respecto, se suele admitir que la primera máquina térmica fue la de Thomas Savery (patentada en 1668) que fue diseñada para extraer agua de las minas inglesas de carbón. Esta máquina nunca llegó a funcionar correctamente, porque las tuberías que transportaban el vapor reventaban frecuentemente. Además, tenía un rendimiento (porcentaje del calor desprendi-

do que se transforma en trabajo mecánico) muy bajo, aproximadamente del 2%. Estos problemas llevaron a otros inventores a intentar perfeccionar los modelos existentes.

Finalmente, el prototipo que se impuso fue el de James Watt (1788) que mejoró la eficiencia energética, llegando a tener rendimientos entre el 10% y el 15% e incorporó el regulador de velocidad, inspirado en los molinos de viento, para conseguir resolver uno de los problemas básicos: que la presión se mantuviera constante.

El péndulo centrífugo regulaba la cantidad de vapor suministrada por la caldera a la turbina de la máquina de vapor. Si la velocidad de giro del motor aumentaba, los dos pesos se alejaban, cerrando la válvula por la que entraba el vapor y frenando el motor. Al frenarse el motor en exceso, caían los pesos (ver la Figura 4) por la disminución de la



Figura 4: Péndulo centrífugo.

fuerza centrífuga y se abría la válvula del vapor acelerando el motor. Se lograba así una velocidad constante de manera automática.

Los primeros reguladores de Watt tenían un buen comportamiento debido al gran rozamiento existente entre sus piezas, pero a mediados del siglo XIX cambiaron las técnicas de diseño de las máquinas y se observó que la velocidad de las máquinas variaba con comportamientos inestables.

### 3. Teoría de Control clásica

Debido a la relevancia del tema, muchos científicos de la época se ocuparon del problema e hicieron aportaciones importantes en sus estudios. El artículo “On Governors” de J. C. Maxwell (1868) se considera como el origen de la Teoría de Control Clásica porque mostró que el comportamiento de un sistema de control automático cerca de una posición de equilibrio se puede aproximar por una ecuación diferencial ordinaria (EDO) lineal con coeficientes constantes y por lo tanto la estabilidad se puede discutir en términos de las raíces del polinomio asociado. De hecho, el esquema que utilizó Maxwell es el que se sigue usando desde entonces en este campo.

Simplificadamente, podemos pensar que si  $x(t)$  representa el estado de la máquina, su dinámica satisface una EDO del tipo

$$ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = 0. \quad (1.1)$$

Es bien conocido que la forma que tiene  $x(t)$  depende del valor de las raíces  $\lambda_1, \lambda_2$  del polinomio asociado  $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ . Concretamente,

- a) Si  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , la solución general de (1.1) viene dada por

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}, \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

- b) Si  $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$ , la solución general de (1.1) viene dada por

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 t e^{\lambda_1 t}, \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

- c) Si las raíces son complejas ( $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta \in \mathbb{C}$ ), la solución general de (1.1) viene dada por

$$x(t) = e^{\alpha t} (c_1 \cos(\beta t) + c_2 \sin(\beta t)), \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Suponiendo que  $x(t) = 0$  es la solución de equilibrio alrededor de la cual nos gustaría estabilizar nuestro sistema (al menos aproximadamente), del estudio del comportamiento de las expresiones anteriores cuando  $t \rightarrow +\infty$ , queda claro que el único caso en que se puede conseguir ésto (ante la presencia de posibles perturbaciones, aunque sean muy pequeñas) es cuando las dos raíces tienen parte real negativa, porque es entonces cuando podemos asegurar que  $x(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ .

Veamos cómo se combinan estas ideas en un ejemplo clásico, como es el movimiento de un brazo rígido giratorio a través de un motor situado en el extremo que lo conecta al robot (matemáticamente, este sistema se puede ver como un péndulo que puede hacer giros completos al aplicarle una fuerza externa). Nos podemos plantear varios objetivos: el primero es llevar el brazo a su posición vertical hacia arriba partiendo de la posición estable hacia abajo. Este es un problema de controlabilidad. Una vez lo tenemos en la posición vertical hacia arriba, el segundo objetivo es mantenerlo ahí, a pesar de la presencia de pequeñas perturbaciones inesperadas (aire, vibraciones, ...) El sistema es inestable en el sentido de que puede caer en cualquier instante a menos que se le aplique una fuerza adecuada, a través del movimiento del motor. Este es un problema de estabilización que vamos a estudiar a continuación.

Si denotamos por  $x(t)$  el ángulo que forma el brazo con la vertical (medido en sentido contrario a las agujas del reloj) y  $u(t)$  el momento de fuerza aplicado a través del motor, utilizando la segunda Ley de Newton junto a ciertas simplificaciones, se llega (ver [9] y [12]) a que la EDO que rige este sistema viene dada por:

$$x''(t) - x(t) = u(t) \quad (1.2)$$

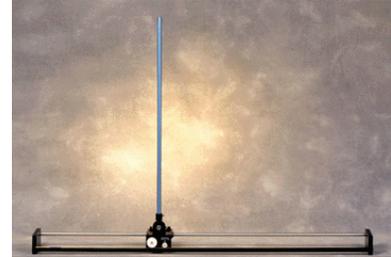


Fig. 5: Péndulo invertido.

Supongamos entonces que el brazo se encuentra ya en la posición vertical hacia arriba. Podemos plantearnos ahora diversas opciones para elegir el control  $u(t)$  de tipo **feedback** (es decir, que dependa del propio estado  $x(t)$  del sistema) para conseguir nuestro objetivo de estabilización alrededor de dicha posición, a pesar de la posible presencia de perturbaciones:

- 1) Control P (Proporcional):  $u(t) = -cx(t)$  para alguna constante  $c$  a elegir. En este caso, la EDO (1.2) se convierte en  $x''(t) + (c - 1)x(t) = 0$ . Teniendo en cuenta la forma que tiene la solución general, podemos concluir que si  $c > 1$ , las raíces del polinomio asociado son imaginarias puras (es decir, con parte real  $\alpha = 0$ ) y las soluciones resultan ser oscilantes. Si  $c < 1$ , una raíz es positiva por lo que las soluciones son divergentes cuando  $t \rightarrow +\infty$ . Si  $c = 1$ , entonces  $\lambda = 0$  es raíz doble y las soluciones son también divergentes cuando  $t \rightarrow +\infty$ .

Vemos entonces que este tipo de controles no son adecuados para estabilizar el sistema que nos ocupa por lo que debemos intentar otras opciones.

- 2) Control PD (Proporcional-Derivativo):  $u(t) = -cx(t) - bx'(t)$  para algunas constantes  $b$  y  $c$  a elegir convenientemente. En este caso, la EDO (1.2) se transforma en  $x''(t) + bx'(t) + (c - 1)x(t) = 0$ . De nuevo podemos realizar un estudio similar al anterior y concluir que si  $c > 1$  y  $b^2 > 4(c - 1)$ , las dos raíces tienen parte real negativa y por lo tanto las soluciones son estables cuando  $t \rightarrow +\infty$ .

Por supuesto, existen muchos otros tipos posibles de control feedback: por ejemplo, uno muy típico se denomina PID porque combina tres términos uno Proporcional, otro Integral y otro Derivativo.

En la web [10] se pueden ver varios vídeos relacionados muy interesantes sobre un mecanismo de péndulo invertido montado en un carro con propulsión a motor (ver la Figura 5). Se trata de un sistema con dos grados de libertad de los cuales sólo uno está actuado (el carro). Se puede ver allí el diseño e implementación del sistema de control para conseguir los objetivos citados anteriormente (controlabilidad y estabilización). Además, se pueden ver también otros vídeos relativos a un mecanismo de péndulo doble invertido (con tres grados de libertad de los cuales sólo uno está actuado: el carro), cuyo tratamiento es claramente más complicado.

## 4. Antecedentes de la Teoría de Control Óptimo

Los problemas de búsqueda de valores máximos y mínimos de funciones han sido una constante a lo largo de la historia de las matemáticas, por su interés económico, geométrico o físico. Un ejemplo clásico lo encontramos en los orígenes de Cartago, cerca de la actual ciudad de Túnez. Según se relata en “La Eneida” de

Virgilio, Cartago fue fundada en el siglo IX a. C. por la princesa Dido, hermana de Pigmalión, rey de Tiro. Cuando su hermano asesinó a su esposo, ella huyó a la costa de África y negoció allí la compra de un trozo de tierra para instalarse. Recio a la operación, el rey de aquella zona le ofreció tanta tierra como pudiera ser abarcada por una piel de buey. La princesa Dido, que era muy ingeniosa, cortó la piel en tiras muy finas y las fue atando formando una cuerda de gran longitud que extendió sobre el suelo para abarcar la mayor cantidad de terreno posible. Se enfrentó así al problema isoperimétrico: encontrar la curva con un perímetro dado que encierra la máxima área y cuya solución es muy intuitiva.

En el siglo XVII, los intentos por explicar la refracción de la luz condujeron a Fermat a proponer el famoso principio que lleva su nombre: “La trayectoria seguida por la luz para pasar de un punto a otro es aquella para la cual el tiempo de recorrido es mínimo (más precisamente, estacionario respecto a posibles variaciones)”. A partir de ese momento, la idea de que la “naturaleza es económica en todas sus acciones” (Maupertuis, 1744) pasó a ser central en física y condujo al principio de mínima acción de Hamilton que es un presupuesto básico de la mecánica clásica y la mecánica relativista.

Para la formulación matemática de estos principios se utiliza lo que hoy llamamos el **Cálculo de Variaciones**, cuyo origen está ligado históricamente con el **problema de la braquistócrona** propuesto por J. Bernoulli en 1696 y que se puede relacionar con el problema de óptica citado anteriormente: “Dados dos puntos en un plano vertical a diferente altura, hallar la curva por la que una partícula móvil, descendiendo sólo por su propio peso, alcanza el punto inferior en el menor tiempo posible”. La solución a este problema no es tan intuitiva ya que se trata de la curva **cicloide**, como se puede comprobar experimentalmente en muchos museos de la ciencia actuales, ver la Figura 6.

El problema básico del Cálculo de Variaciones se puede formular de la siguiente manera, ver [2]:

$$\begin{cases} \text{Minimizar} & J(x) = \int_0^T L(t, x(t), x'(t)) dt, \\ x(0) = x_0 \\ x(T) = x_1 \end{cases} \quad (1.3)$$

donde se minimiza entre todas las curvas  $x(t)$  que verifican las condiciones dadas, suponiendo que  $T$ ,  $x_0, x_1$  y  $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  son datos conocidos. Una cuestión muy relevante en este problema es fijar el tipo de funciones  $x(t)$  que vamos a considerar



Figura 6: Braquistócrona.

admisibles (de clase  $C^1$ , continuas con derivada continua a trozos, ...), pero no vamos a entrar en esta cuestión técnica.

Para identificar la solución (o soluciones) de este problema (en caso de existir) hay que obtener las condiciones necesarias que debe verificar y que son una generalización de las condiciones conocidas para funciones reales de variable real. De hecho, se pueden obtener a partir de ellas, utilizando la siguiente técnica: suponiendo que la curva  $\bar{x}(t)$  es una solución de (1.3), consideramos la función real de variable real

$$\tilde{J}(\epsilon) = J(\bar{x} + \epsilon h),$$

para cada función  $h(t)$  que verifica  $h(0) = h(T) = 0$ . Utilizando los resultados clásicos para funciones reales de variable real, sabemos que las derivadas de primer y segundo orden de  $\tilde{J}$  respecto de  $\epsilon$  deben verificar  $\tilde{J}'(0) = 0$  y  $\tilde{J}''(0) \geq 0$ . Reescribiendo estas condiciones para el funcional  $J$  que nos ocupa, haciendo algunas integraciones por partes y utilizando que  $h$  puede ser cualquier función verificando  $h(0) = h(T) = 0$ , se deduce la condición de Euler (en forma de problema de contorno)

$$\begin{cases} L_x(t, \bar{x}(t), \bar{x}'(t)) = \frac{d}{dt} (L_{x'}(t, \bar{x}(t), \bar{x}'(t))), & \forall t \in [0, T], \\ \bar{x}(0) = x_0, \quad \bar{x}(T) = x_1, \end{cases} \quad (1.4)$$

y la condición de Legendre

$$L_{x'x'}(t, \bar{x}(t), \bar{x}'(t)) \geq 0, \quad \forall t \in [0, T], \quad (1.5)$$

donde  $L_x, L_{x'}$  y  $L_{x'x'}$  denotan las derivadas parciales de  $L$  respecto de su segunda y tercera variable, de primer y segundo orden, respectivamente.

Este tipo de técnicas permiten estudiar variantes del problema básico de Cálculo de Variaciones (ver [2]) que incluyen restricciones de igualdad o desigualdad generales y casos donde  $x_1$  y/o  $T$  no son conocidos.

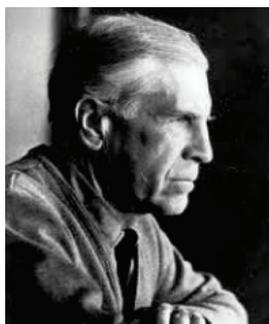


Fig. 7: Pontryagin.

## 5. Teoría de Control Óptimo para EDO

A mediados del siglo XX, tratando de resolver diversos problemas económicos e industriales que surgieron en la URSS, (como el problema de la parada más rápida de los ascensores en los pozos de las minas) se puso de manifiesto la necesidad de extender el Cálculo de Variaciones. El eminente matemático Lev S. Pontryagin (1908-1988) y su equipo se dedicaron a este tema, logrando formalizar una teoría muy general para resolver estos problemas.

Curiosamente, por aquellas fechas, L. S. Pontryagin (que era ciego desde los 14 años y profesor en la Universidad de Moscú) era un matemático teórico muy conocido por sus trabajos en topología. Pontryagin presentó el famoso principio que ahora lleva su nombre (y que es el resultado central de la teoría) en una conferencia plenaria del ICM en Edimburgo (1958), causando una gran expectación. Para dar una idea de la repercusión del tema, diremos que Pontryagin y sus colaboradores publicaron en 1961 un libro con la teoría completa (en ruso, naturalmente) que fue traducido al inglés de manera inmediata ([8]), a pesar de encontrarse todavía en plena Guerra Fría.

Podemos analizar lo que dice el **Principio de Pontryagin** en una situación simplificada, pero todavía suficientemente general. Supongamos que estamos estudiando un sistema físico, cuyo estado  $x(t)$  viene dado por la solución de una EDO de primer orden de la forma

$$x'(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad t \in [0, T], \quad x(0) = x_0, \quad (1.6)$$

donde  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  son datos conocidos y  $u(t)$  es el control que representa la parte del sistema que podemos modificar a nuestra voluntad para tratar de minimizar el funcional de coste que nos interese y que presentamos en la forma:

$$\begin{cases} \text{Minimizar} & J(u) = \int_0^T L(t, x(t), u(t)) dt + \psi(x(T)), \\ & u(t) \in U_{ad} \end{cases} \quad (1.7)$$

donde  $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  y  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones conocidas. Un ejemplo típico es el caso cuadrático, en el cual

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^T (x(t) - x_d(t))^2 dt + \frac{N}{2} \int_0^T (u(t))^2 dt + \frac{1}{2} (x(T) - x_1)^2, \quad (1.8)$$

donde  $x_d$  es el estado ideal al cual queremos que se aproxime  $x(t)$  en el intervalo  $(0, T)$ ,  $x_1$  el valor que nos gustaría que tomase el estado en el instante final y  $N \geq 0$  viene asociado al coste del control, de forma que cuando  $N$  es grande queremos indicar que el control  $u(t)$  resulta caro, mientras que si  $N$  es pequeño estamos en una situación donde el control es barato.

Notemos que los problemas de Cálculo de Variaciones quedan incluidos como casos particulares al considerar la EDO  $x'(t) = u(t)$ , es decir,  $f(t, x, u) = u$  en (1.6).

El valor del tiempo final  $T$  puede ser conocido a priori o no. En este segundo caso, cuando  $L(t, x, u) = 1$  y  $\psi = 0$ , estamos considerando problemas de tiempo mínimo, de gran interés en la práctica. En lo que sigue, supondremos que  $T$  es fijo desde el principio, por simplicidad.

En la mayoría de los problemas, los controles que resultan físicamente admisibles deben satisfacer algunas restricciones de diversos tipos (tecnológicas, legales, económicas, ...) que se incluyen en  $U_{ad}$ . Por ejemplo, en el caso del péndulo invertido, si el momento de la fuerza aplicada sólo puede variar dentro de unos límites  $\alpha$  y  $\beta$ , el conjunto  $U_{ad}$  es el intervalo  $[\alpha, \beta]$ .

Con estas notaciones, el Principio de Pontryagin establece que si  $\bar{u}$  es un control óptimo para el problema (1.7), siendo  $\bar{x}$  su estado asociado, se debe verificar que

$$H(t, p(t), \bar{x}(t), \bar{u}(t)) \leq H(t, p(t), \bar{x}(t), u), \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall u \in U_{ad}, \quad (1.9)$$

donde  $H$  denota el Hamiltoniano

$$H(t, p, x, u) = L(t, x, u) + pf(t, x, u), \quad (1.10)$$

siendo  $p$  el estado adjunto, esto es, la única solución del sistema

$$\begin{cases} -p'(t) = L_x(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) + p(t)f_x(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)), & t \in [0, T], \\ p(T) = \psi'(\bar{x}(T)). \end{cases} \quad (1.11)$$

Notemos que la EDO del sistema adjunto (1.11) es siempre lineal y la condición adicional se da en el instante final  $T$ , aunque la EDO del sistema (1.6) pueda no ser lineal y allí la condición sea inicial. El papel que juega el estado adjunto en los problemas de control óptimo es análogo al de los multiplicadores de Lagrange en los problemas de optimización en dimensión finita.

En resumen, podemos caracterizar el control óptimo  $\bar{u}$  a través de la minimización de una función de una variable real, lo cual es realmente sorprendente, pero la dificultad radica en que esa función a minimizar depende a su vez de  $\bar{u}$  (a través de  $\bar{x}$  y  $p$ ) por lo cual hay que resolver simultáneamente las EDO (1.6) para  $u = \bar{u}$  y (1.11), teniendo en cuenta además que la primera se resuelve hacia adelante (de 0 a  $T$ ) y la segunda hacia atrás (desde  $T$  hacia 0). En la mayoría de los ejemplos reales, la resolución no puede ser analítica, sino que debe ser numérica. No obstante, se puede apreciar la utilidad del Principio de Pontryagin en ejemplos particulares, como los que siguen:

- en el caso en que no haya restricciones sobre el control ( $U_{ad} = \mathbb{R}$ ), el funcional  $L(t, x, u) = \frac{N}{2}u^2$  y en la EDO  $f(t, x, u) = u$ , el Hamiltoniano viene dado por  $H(t, p, x, u) = \frac{N}{2}u^2 + pu$  y es muy fácil deducir dónde alcanza  $H$  su valor mínimo respecto de  $u$ , derivando e igualando a 0. Se llega así a que el control óptimo viene dado por  $\bar{u}(t) = -\frac{p(t)}{N}$ .
- en el caso en que  $U_{ad} = [\alpha, \beta]$ ,  $L$  y  $f$  son lineales respecto de  $u$  ( $L(t, x, u) = L_1(t, x) + uL_2(t, x)$  y  $f(t, x, u) = f_1(t, x) + uf_2(t, x)$ ), también es fácil deducir que el control óptimo viene dado por

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} \alpha & \text{donde } \rho(t) > 0, \\ \beta & \text{donde } \rho(t) < 0, \end{cases} \quad (1.12)$$

siendo  $\rho(t) = L_2(t, \bar{x}(t)) + p(t)f_2(t, \bar{x}(t))$ . Cuando  $\rho(t)$  sólo se anula en un número finito de puntos del intervalo  $[0, T]$ , este tipo de controles se llama **bang-bang** porque sólo toma los valores extremos de entre los admisibles y va saltando de uno a otro (salvo que sea constante).

Nuevamente, en las situaciones reales suelen aparecer otras dificultades que nos hemos considerado aquí (sistemas de EDO, diferentes tipos de restricciones sobre el estado, ...) y que pueden complicar enormemente la obtención del correspondiente principio de Pontryagin desde el punto de vista técnico. No obstante, el marco general sigue siendo el mismo que obtuvieron Pontryagin y sus colaboradores.

## 6. Filtro de Kalman

Aproximadamente durante la misma época, el ingeniero Rudolf E. Kalman estaba trabajando en una dirección muy diferente: la identificación del estado (oculto) de un sistema lineal discreto, en presencia de ruido aleatorio. En 1960 ([4]) publicaba lo que se conoce desde entonces como **el filtro de Kalman**, un algoritmo de tipo predictor-corrector que calcula una estimación óptima del estado del sistema en cada momento, usando la información disponible en el instante  $k - 1$  y actualizándola con la información adicional disponible en el instante  $k$ . Su indudable interés práctico se puso de manifiesto en poco tiempo, porque fue implementado en el ordenador del módulo Eagle, incluido en el Apolo XI, la primera nave tripulada en llegar a la Luna el 20 de julio de 1969.

El filtro de Kalman fue un componente fundamental del sistema de guiado y estabilización del módulo para ejecutar la maniobra de descenso. Desde entonces, su rango de aplicaciones se ha extendido a ámbitos como la comunicación, la meteorología, el procesamiento de imágenes y la robótica, manteniéndose por supuesto su papel esencial en el campo de la navegación (pilotos automáticos, satélites, radares,...)



Figura 8: Apolo 11.



Fig. 9: Kalman.

Veamos a continuación una breve descripción del algoritmo. Supondremos que en el instante  $k$  la dinámica del modelo que nos interesa viene dada por

$$x_k = Ax_{k-1} + Bu_k + w_k,$$

donde  $A$  y  $B$  son matrices conocidas,  $u_k$  es el vector control en esa etapa y  $w_k$  es el vector ruido que sigue una distribución gaussiana con media cero y matriz de covarianza  $Q$ . En la práctica, solamente disponemos de la observación  $z_k$  del estado  $x_k$  dada por

$$z_k = Hx_k + v_k,$$

donde  $H$  es una matriz conocida y  $v_k$  es el vector ruido de la observación que también sigue una distribución gaussiana de media cero y matriz de covarianza  $R$ .

Además, suponemos que los ruidos son independientes y que el estado inicial es conocido. Usando la notación  $\hat{x}_{n|m}$  para representar la estimación de  $x_n$  supuestas conocidas las observaciones hasta el instante  $m$  inclusive, el algoritmo de Kalman se puede presentar como sigue:

■ Fase de Predicción:

- Estimación inicial del estado:  $\hat{x}_{k|k-1} = A\hat{x}_{k-1|k-1} + Bu_k$ .
- Estimación inicial de la matriz de covarianza:

$$P_{k|k-1} = AP_{k-1|k-1}A^T + Q.$$

donde el superíndice  $T$  indica matriz traspuesta.

■ Fase de Corrección:

- Residuo:  $\tilde{y}_k = z_k - H\hat{x}_{k|k-1}$ .
- Residuo de la covarianza:  $S_k = HP_{k|k-1}H^T + R$ .
- Ganancia de Kalman:  $K_k = P_{k|k-1}H^T S_k^{-1}$ .
- Estimación corregida del estado:  $\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + K_k\tilde{y}_k$ .
- Estimación corregida de la matriz de covarianza:

$$P_{k|k} = (I - K_kH)P_{k|k-1}.$$

En la web [1], se recopila multitud de material interesante sobre el Filtro de Kalman, tanto a nivel introductorio, como avanzado, de tipo histórico, sobre aplicaciones, generalizaciones, libros, cursos, software, etc... Por otra parte, en el libro

[9] de E. Sontag (alumno de Kalman) se desarrolla la versión determinista del filtro y se recopilan otros resultados importantes obtenidos por Kalman en el campo de la controlabilidad.

## 7. Teoría de Control para EDP

Es bien conocido que para modelizar muchos sistemas reales es imprescindible utilizar Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDP) en lugar de EDO. Por lo tanto, resulta también clara la necesidad de construir una teoría análoga a la que hemos visto para EDO. Una dificultad importante para conseguir este objetivo es que las técnicas para tratar las EDP son muy diferentes dependiendo del tipo que tengan (parabólico, elíptico o hiperbólico). Además, las herramientas modernas para estudiarlas en profundidad no han estado disponibles hasta mediados del siglo XX, por lo que se entiende que esta extensión sea un campo de investigación todavía en desarrollo.

De la misma manera que en el campo de las EDO hemos destacado a Pontryagin por encima del resto de los matemáticos e ingenieros que han contribuido con sus estudios, en el ámbito de las EDP, creo que es justo destacar al matemático francés Jacques-Louis Lions (1928-2001), por varias razones. Como alumno de L. Schwartz (que fue Medalla Fields en 1950 por conseguir una teoría matemáticamente coherente y completa de la teoría de distribuciones), J. L. Lions participó en los orígenes del concepto de solución débil de una EDP (al igual que la escuela rusa con S. L. Sobolev a la cabeza) por lo que estaba en inmejorables condiciones para establecer (como bien hizo) las

bases de la Teoría de Control para EDP. Sería muy prolijo detallar mínimamente aquí sus contribuciones en todos los campos (controlabilidad, estabilización y control óptimo de EDP, ver por ejemplo su clásico libro [6]), pero sí diremos que es una referencia ineludible en todos ellos.

Su labor no se limitó (y ya hubiera sido más que suficiente) a los aspectos más teóricos, sino que dedicó una gran parte de su tiempo a la gestión científica al máximo nivel: fue el primer presidente del INRIA (Institut National de la Recherche en Informatique et Automatique); también presidió el CNES (Centre National d'études Spatiales), germen de la actual Agencia Espacial Europea (1984-1992), la IMU (1991) y la Academia de Ciencias (1997-1999), entre otros cargos.

Igualmente, J. L. Lions dedicó muchos esfuerzos al desarrollo de la matemática aplicada en muchos países (entre ellos, España), participando en numerosos con-



Figura 10: J. L. Lions.

gresos y reuniones científicas y animando la investigación matemática ligada a problemas de interés práctico. Y no sólo impartía conferencias plenarias, sino que asistía después a muchas de las comunicaciones y realizaba observaciones con ánimo constructivo. Por nuestra parte, tuvimos la suerte de contar con su presencia en el “IFIP Workshop on Control of PDE’s” que organizamos en Laredo (Cantabria) en septiembre de 1994 y puedo decir (tras conocerle de manera un poco más personal) que era además una gran persona.

Probablemente la historia siguiente sirva para apreciar con nitidez la estrecha conexión entre sus facetas como matemático y como gestor y aclare la enorme influencia que tuvo a todos los niveles.

Como es bien sabido, el Ariane 5 es una nave lanzadera desarrollada por la Agencia Espacial Europea. Su primer lanzamiento se produjo el 4 de junio de 1996 y fue un completo desastre: sólo duró unos segundos [11] y su explosión supuso unas pérdidas estimadas de unos 5000 millones de euros y un año de retraso del proyecto. Tras la catástrofe, se encargó un informe a una comisión presidida por J. L. Lions, que fue presentado en poco más de un mes [7]. En el informe se analizaron las posibles causas de la explosión y se concluyó que fue debida a un fallo en el sistema de control del vuelo por el desbordamiento (overflow) del sistema (aparición de un dato numérico excesivamente grande, fuera del rango previsto). La nave hizo una brusca e innecesaria corrección de su trayectoria, tratando de compensar un problema inexistente. La parte del software donde se presentó el fallo se había reutilizado del Ariane 4, donde esta situación no se había presentado debido a las diferentes características técnicas entre ambas naves. Ahora es un ejemplo en los libros de computación. Una vez subsanado el fallo, el proyecto se retomó con éxito hasta el punto de llevar realizados más de 50 lanzamientos desde entonces.

## 8. Otras áreas de aplicación de la Teoría de Control

Finalmente, vamos a enumerar otros campos donde algunas de las técnicas mencionadas se están utilizando de manera exhaustiva. Por ejemplo, en **Medicina**, en la lucha contra el cáncer, proponiendo nuevos procedimientos para administrar la quimioterapia y la radioterapia que sean cada vez más efectivos y menos perjudiciales para los pacientes. También para desarrollar un corazón artificial (dada la escasez de corazones disponibles para trasplantes), donde el reto es controlar la frecuencia cardíaca y el flujo de la sangre, lo cual implica trabajar con EDP (como Navier-Stokes). Otro tanto sucede con el páncreas artificial que busca proporcionar una mejor calidad de vida a los diabéticos y donde el objetivo es controlar el nivel de insulina que debe administrarse en cada momento. En estos momentos ya existen prototipos que se están probando en personas con diabetes de tipo 1.

También en **Biología**, donde ha cobrado mucha importancia el control de plagas y enfermedades, usando ciertos organismos vivos (insectos, algas, ...) para controlar poblaciones de otros. Para ello se utilizan modelos matemáticos inspirados en el sistema de EDO presa-depredador de Lotka-Volterra. Lo mismo sucede en **Química** donde es preciso controlar diversas variables en las reacciones químicas (presión, temperatura, caudal,...), que son fundamentales para industrias tan básicas como la petrolífera, papelera, plásticos, etc... Por último, es bien conocido que en **Economía** también se utilizan sistemas de control de manera profusa para la gestión de recursos, la toma de decisiones en inversiones, infraestructuras, compra-venta, etc... Conviene indicar aquí que, si algo ha quedado claro en la crisis que sufrimos, es que no han sido precisamente las herramientas matemáticas las que han fallado, sino las personas.

Parece claro que para poder obtener resultados realmente interesantes en cada una de estas disciplinas es imprescindible que los trabajos sean desarrollados por equipos multidisciplinares donde se combinen los conocimientos y experiencia de sus miembros en cada uno de los aspectos a tener en cuenta, tanto teóricos como prácticos.

Sería completamente imposible enumerar la multitud de artículos, libros y revistas especializadas que existen sobre cada uno de los temas citados (y otros muchos más que han quedado fuera). En este sentido, citaremos solamente el extenso manual [5].

Confío que a lo largo de este trabajo haya quedado claro que la Teoría de Control es una materia en continuo desarrollo y muy ligada a los avances tecnológicos más recientes, por lo que nuevos problemas (tanto matemáticos como tecnológicos) siguen apareciendo permanentemente y retando a la comunidad científica.

## Bibliografía

- [1] *Filtro de Kalman*,  
<http://www.cs.unc.edu/~welch/kalman/>
- [2] E. Galéev y V. Tijomírov, *Breve curso de la Teoría de problemas extremales*, Ed. Mir, Moscú, 1991.
- [3] *Historia de la Ingeniería de Control*,  
<http://automata.cps.unizar.es/Historia/Webs/IntroduccionI.htm>
- [4] R. E. Kalman, *A new approach to linear filtering and prediction problems*, Journal of Basic Engineering 82 (1), 35-45, 1960.
- [5] W. S. Levine (editor), *The Control Handbook*, CRC Press, 1996.



Figura 11: Corazón artificial.

- [6] J. L. Lions, *Optimal control of systems governed by partial differential equations*, Springer-Verlag, 1971.
- [7] J. L. Lions, *Informe sobre el fallo del Ariane 501*, <http://www.di.unito.it/~damiani/ariane5rep.html>
- [8] L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze y E. F. Mishchenko, *The mathematical theory of optimal processes*, John Wiley & Sons, 1962.
- [9] E. D. Sontag, *Mathematical Control Theory: Deterministic Finite Dimensional Systems*, Springer, 1998.
- [10] *Videos del péndulo simple y del péndulo doble en*, <http://www.tecnun.es/asignaturas/control1/proyectos/pdobleinv/video.htm>
- [11] *Vídeo “ariane 5 explosion” en youtube.com.*
- [12] E. Zuazua, *Las Matemáticas del Control*, en “De la Aritmética al Análisis: Historia y desarrollo recientes en Matemáticas”, MEC, Aulas de Verano, Instituto Superior de Formación de Profesorado, 2004, páginas 245-316. <http://www.mat.ucm.es/~rrdelrio/documentos/zuazuaesco2002.pdf>

**Luis Alberto Fernández Fernández**

Universidad de Cantabria

Facultad de Ciencias

Departamento de Matemáticas, Estadística y  
Computación.

Avda. de los Castros s/n, 39005 (Santander)

e-mail: [lafernandez@unican.es](mailto:lafernandez@unican.es)

