Geometría simpléctica y ciencia

por

Juan Carlos Marrero González, Universidad de la Laguna

As each skylark must display its comb, so every branch of mathematics must finally display symplectization

Arnold: Catastrophe Theory (Springer-Verlag, Berlin, 1987)

1. Orígenes de la Geometría Simpléctica y un poco de historia

El término *simpléctico* viene del griego *symplektikos* que significa que entrelaza o que une. Este nombre fue usado por primera vez en 1939 por H. Weyl en su tratado *"The classical groups"* sobre los grupos de movimientos rígidos de varios tipos básicos de geometría multidimensional.

J-L Lagrange, 1736-1813

En cualquier caso, los orígenes de la Geometría Simpléctica habría que buscarlos a principios del siglo XIX con los trabajos de Lagrange sobre Mecánica Analítica. En un intento de simplificar las ecuaciones del movimiento planetarias, Lagrange obtiene las *ecuaciones de Hamilton*, ecuaciones que gobiernan la dinámica de un sistema mecánico autónomo. Se trata de un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden que involucra a la *energía total* H del sistema (la suma de las energías cinética y potencial) y cuya integración permite obtener *las posiciones*

$(q^1, \dots, q^n)$ y *los momentos* $(p_1, \dots, p_n)$ del sistema en cada instante de tiempo t. En $\mathbb{R}^{2n}$, o en un abierto de $\mathbb{R}^{2n}$, la expresión explícita de este sistema es la siguiente:

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}, \quad i \in \{1, \dots, n\}.$$

Volveremos a estas ecuaciones más adelante. De cualquier manera, durante el siglo XIX la naturaleza geométrica y cualitativa de la Mecánica no estaba nada clara. Sólo a fines de este siglo encontramos a algunos físicos matemáticos, como Darboux o Hertz, usando las ideas geométricas en Mecánica. Pero fue Poincaré, a principios del siglo XX, quien inicia la era cualitativa con el estudio de las órbitas periódicas en el problema de los n-cuerpos. De hecho *el último teorema geométrico de Poincaré*, cuyo enunciado es:

> *Una aplicación continua de una corona circular que preserva el área y que mueva las fronteras en sentidos opuestos tiene al menos dos puntos fijos,*

H. Poincaré, 1854-1912

implica la existencia de infinitas órbitas periódicas en el problema de los tres cuerpos. El enunciado de este teorema muestra la importancia de las aplicaciones que preservan áreas y fronteras. El primer conjunto de estas aplicaciones no sólo está relacionado con la Mecánica sino también con la Geometría Simpléctica, como veremos posteriormente.

Después de Poincaré las técnicas simplécticas empiezan a ser usadas y la Geometría Simpléctica va avanzando lentamente de manera que en los años 50 algunos matemáticos franceses como Ehresmann, Lichnerowicz o Reeb, ponen las bases para desarrollos futuros y las aplicaciones a la Mecánica.

De esta forma en los años 60, la Geometría Simpléctica está consolidada como una rama más de las Matemáticas y el nexo de unión con la Mecánica ha sido definitivamente establecido. Finalmente en los últimos 30 años, un crecimiento espectacular de las investigaciones ha convertido a la Geometría Simpléctica en una de las producciones matemáticas y físicas más importantes del siglo XX.

H. Weyl, 1885-1955

2. Geometría Simpléctica: la geometría de las áreas orientadas

De forma elemental, podríamos decir que la Geometría Simpléctica es *la geometría de las áreas orientadas.* A continuación, intentaremos justificar esta afirmación de manera intuitiva.

Comencemos con el ejemplo más sencillo: el plano $\mathbb{R}^2$. La forma simpléctica usual Ω del plano $\mathbb{R}^2$ es un objeto matemático que a un par de vectores $\vec{u} = (u_1, u_2)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2)$ en $\mathbb{R}^2$ les asocia el área orientada $\Omega(\vec{u}, \vec{v})$ del paralelogramo en $\mathbb{R}^2$ generado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, esto es,

$$\Omega(\vec{u}, \vec{v}) = u_1 v_2 - u_2 v_1.$$

Así, Ω puede ser interpretada como una aplicación $\mathbb{R}$-bilineal y antisimétrica sobre $\mathbb{R}^2$, esto es, una 2-forma sobre $\mathbb{R}^2$.

Pero, además, Ω es no degenerada en el sentido de que las únicas áreas nulas resultan cuando $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son proporcionales. Esta propiedad puede ser expresada en términos matemáticos de la siguiente forma

$$\Omega(\vec{u}, \vec{v}) = 0, \quad \forall\, \vec{v} \;\Rightarrow\; \vec{u} = \vec{0}.$$

Nótese que la matriz asociada a Ω respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^2$ es

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Además, es fácil probar que una 2-forma sobre $\mathbb{R}^2$ es no degenerada si y sólo si su matriz (antisimétrica) respecto de la base canónica es regular.

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, uno puede construir, de una manera sencilla, una forma simpléctica lineal Ω sobre $\mathbb{R}^{2n}$, es decir, una aplicación $\mathbb{R}$-bilineal, antisimétrica y no degenerada. Es suficiente definir a Ω como aquella 2-forma sobre $\mathbb{R}^{2n}$ cuya matriz regular y antisimétrica respecto de la base canónica es

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix},$$

donde I_n es la matriz identidad de orden n. Si interpretamos a $\mathbb{R}^{2n}$ como el producto de los planos $\mathbb{R}^2 \times \ldots^{(n} \ldots \times \mathbb{R}^2$, entonces uno puede comprobar que el área orientada de un paralelogramo sobre $\mathbb{R}^{2n}$ (vía Ω) es la suma de las áreas orientadas de sus proyecciones sobre cada uno de estos planos.

Tras la discusión anterior está claro que no es posible definir un concepto de área orientada sobre un espacio de dimensión impar, como $\mathbb{R}^3$, sin introducir degeneraciones. La razón es contundente: una matriz regular y antisimétrica es siempre de orden par.

Por otra parte, en Física y en Matemáticas (y, en general, en la vida real) no todos los fenómenos acontecen en un espacio vectorial real de dimensión finita. Es necesario generalizar las teorías a otros espacios más complicados, pero igualmente útiles. Una clase importante de estos espacios está constituida por las variedades diferenciables, las cuales son una generalización de las superficies en $\mathbb{R}^3$. A grandes rasgos, *una variedad diferenciable* de dimensión n es un espacio topológico de tal forma que cada uno de sus puntos admite un entorno abierto homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^n$ y además la correspondiente transformación de coordenadas inducida por dos de estos entornos (con intersección no vacía) da un difeomorfismo entre abiertos de $\mathbb{R}^n$. Así, uno puede introducir de forma natural la noción de *curva sobre una variedad* y de *vector tangente* a la misma en cada uno de sus puntos (es suficiente trasladar la correspondiente noción en $\mathbb{R}^n$ vía los homeomorfismos coordenados). Entonces, *el espacio tangente* a M en un punto P es un espacio vectorial de dimensión n constituido por todos los vectores tangentes en P a curvas contenidas en M que pasan por P. Por tanto, ya que el espacio tangente a un espacio vectorial en cada uno de sus puntos se puede identificar con el propio espacio, una primera aproximación a la definición de estructura simpléctica sobre una variedad M de dimensión par sería la de dar una forma simpléctica sobre cada uno de sus espacios tangentes de una manera "suave", "sin cambios bruscos", cuando pasamos de un punto a otro de la variedad.

Esto nos permitirá calcular el área orientada de una superficie S contenida en la variedad simpléctica M descomponiendo S en paralelogramos infinitesimales, en cada uno de los espacios tangentes a M en los puntos de S, y sumando luego sus áreas orientadas.

Para fijar las ideas pensemos en un ejemplo sencillo. Se trata de una superficie en $\mathbb{R}^3$: la esfera S^2. La forma simpléctica usual Ω de S^2 puede ser introducida como sigue. Supongamos que x es un punto de S^2 y que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores del plano tangente a S^2 en x. Entonces,

$$\Omega_x(\vec{u}, \vec{v}) = [x, \vec{u}, \vec{v}],$$

donde $[\ ,\ ,\ ]$ denota el producto mixto o triple de $\mathbb{R}^3$. La forma Ω satisface todas las propiedades requeridas.

Antes de seguir adelante conviene indicar que la forma de medir áreas en el plano $\mathbb{R}^2$ y en S^2 es diferente. En efecto, el área de un círculo C de radio r en el plano $\mathbb{R}^2$ es πr^2. Sin embargo, si colocamos C sobre la esfera S^2, el área del círculo resultante es $\pi sen^2 r$ (véase Figura 1).

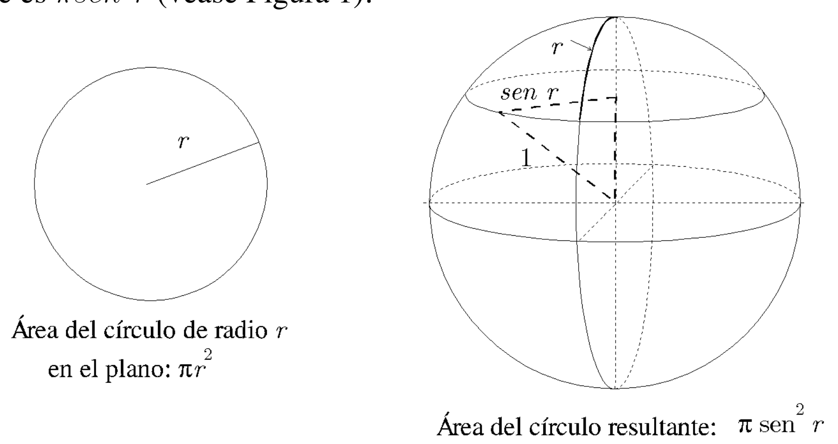


Fig. 1

De la construcción de la forma simpléctica de S^2, uno podría sacar la conclusión equivocada de que dar una estructura simpléctica en una variedad M de dimensión par consiste en asignar de una "manera suave" una forma simpléctica en el espacio tangente a M en cada uno de sus puntos. Sin embargo, esto es exclusivo sólo para dimensión dos. Para dimensión mayor que dos hay que añadir una restricción esencial: es necesario que la suma de las áreas orientadas de superficies que bordean cualquier región compacta de dimensión 3 en la variedad sea nula. Esta condición puede ser expresada en términos geométricos-diferenciales diciendo que la forma simpléctica es *cerrada*.

Para fijar las ideas anteriores pensemos nuevamente en un ejemplo: una subvariedad regular simpléctica S de dimensión $2m$ en $\mathbb{R}^{2n}$. Una subvariedad regular S de dimensión $2m$ de $\mathbb{R}^{2n}$ es una variedad diferenciable de dimensión $2m$ tal que para cada punto x de S uno puede elegir coordenadas $(x^1, \ldots, x^{2n})$ en un entorno U de x en $\mathbb{R}^{2n}$ y

$$U \cap S = \{(x^1, \ldots, x^{2n}) \in \mathbb{R}^{2n} / x^{2m+1} = \ldots = x^{2n} = 0\}.$$

La subvariedad S es simpléctica si la restricción de la forma simpléctica usual de $\mathbb{R}^{2n}$ a S es nuevamente una forma simpléctica sobre S. Supongamos entonces que S es simpléctica y consideremos un sistema de coordenadas $(x^1, \ldots, x^{2m})$ sobre un abierto de S. La restricción de la forma simpléctica Ω de $\mathbb{R}^{2n}$ al espacio tangente a S en cada uno de los puntos del abierto, está determinada por una matriz antisimétrica de orden $2m$ de funciones sobre S

$$(\Omega_{ij}(x^k))_{1 \leq i,j \leq 2m}.$$

Además no es difícil probar que

$$\frac{\partial \Omega_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial \Omega_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial \Omega_{ki}}{\partial x^j} = 0, \quad \text{para todo } i, j, k.$$

Este conjunto de ecuaciones expresan el carácter cerrado de la restricción de Ω a S.

En definitiva, una forma simpléctica sobre una variedad M de dimensión par es una 2-forma cerrada y no degenerada sobre M.

Anteriormente, comentamos que la esfera S^2 y el plano $\mathbb{R}^2$ son variedades simplécticas diferentes. Luego podemos afirmar que hay una geometría simpléctica global. Sin embargo, no hay geometría simpléctica local. En efecto, es un hecho comúnmente usado en Cartografía, que un entorno suficientemente pequeño de un punto de la esfera puede ser aplicado sobre el plano sin que se distorsionen las áreas. Sin embargo, es imposible realizar la misma tarea sin que se distorsionen las longitudes. Pensemos en otro ejemplo. Si consideramos una superficie en $\mathbb{R}^{2n}$ y la "acariciamos con la mano" percibimos sus ondulaciones, su

G. Darboux, 1842-1917

curvatura, ya que nuestras manos son buenos detectores de sus propiedades métricas. Si tuviéramos "manos simplécticas", es decir manos que en lugar de percibir distancias sobre superficies percibieran áreas, no notaríamos nada al acariciar nuestra superficie. Esto es debido a que todos los elementos de área de todas las superficies son localmente iguales. De hecho, siempre es posible encontrar coordenadas locales (x, y) en una superficie de tal manera que sus elementos de área se pueden escribir como $dx \wedge dy$. Este resultado puede ser generalizado para una variedad simpléctica arbitraria y esto es justamente lo que establece el *teorema de Darboux*:

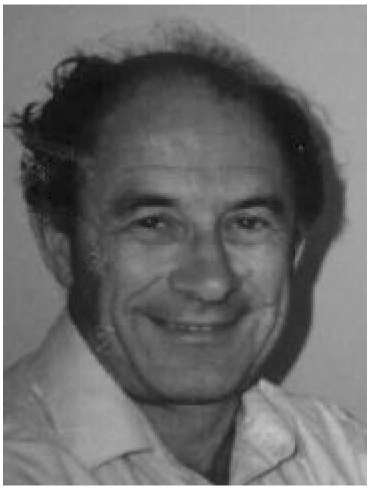
> *Sea M una variedad simpléctica de dimensión $2n$ con forma simpléctica Ω. Entonces para cada punto x de M existe un entorno abierto U de x con coordenadas $q^1, \ldots, q^n, p_1, \ldots, p_n$ tales que Ω se escribe en U de la forma canónica*
>
> $$\Omega = dq^1 \wedge dp_1 + \ldots + dq^n \wedge dp_n.$$

Como una consecuencia deducimos que

> *Las formas simplécticas sobre variedades de la misma dimensión son localmente iguales y, por tanto, no hay geometría simpléctica local.*

3. Puede pasar un camello por el ojo de una aguja?: transformaciones simplécticas

Una cuestión importante en el mundo simpléctico es el estudio de *las transformaciones simplécticas* o *simplectomorfismos*, esto es, las aplicaciones que preservan áreas. Ya Poincaré estaba interesado en el estudio de este tipo de aplicaciones como comentábamos al principio de este trabajo. Muchos años después Arnold retomó la senda marcada por Poincaré y conjeturó algunas generalizaciones de los resultados de este. En estas generalizaciones se trata de poner de manifiesto que propiedades son específicas de los simplectomorfismos frente a los difeomorfismos en general. En su artículo, Arnold formuló un llamamiento para



V.I. Arnold, 1937-

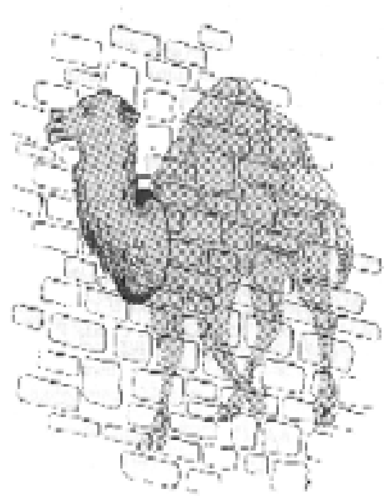
estudiar las propiedades globales de las variedades simplécticas a través del análisis del grupo de transformaciones simplécticas. El trabajo de Arnold es considerado como el inicio de la *topología simpléctica.*

Una transformación simpléctica entre dos espacios simplécticos es una aplicación que preserva las áreas. Esto en términos matemáticos y para el caso particular de $\mathbb{R}^{2n}$ quiere decir que se trata de un difeomorfismo $\varphi : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ cuya diferencial conmuta con la matriz J_0 (la matriz de la forma simpléctica estandar sobre $\mathbb{R}^n$). En otras palabras,

$$d\varphi^T \circ J_0 \circ d\varphi = J_0.$$

Como consecuencia, se deduce que las transformaciones simplécticas de $\mathbb{R}^{2n}$ conservan el volumen.

El estudio de las transformaciones simplécticas ha supuesto la introducción de algunos problemas famosos, como el del *camello simpléctico.* Se trata de ver si seríamos capaces de "pasar un camello a través del ojo de una aguja" sin distorsionar las áreas. El problema matemático podría plantearse como sigue. Imaginemos en $\mathbb{R}^{2n}$ con coordenadas $(q^1, \ldots, q^n, p_1, \ldots, p_n)$ el hiperplano $H \equiv p_n = 0$. Al hiperplano H le quitamos una bola de radio $\varepsilon > 0$ y en una de las regiones que delimita H colocamos una bola de radio $r > \epsilon$ (véase Figura 2). Se trata de pasar la bola por el agujero. No es difícil convencerse de que esto lo podemos hacer con transformaciones que conserven el volumen.



Camello simpléctico

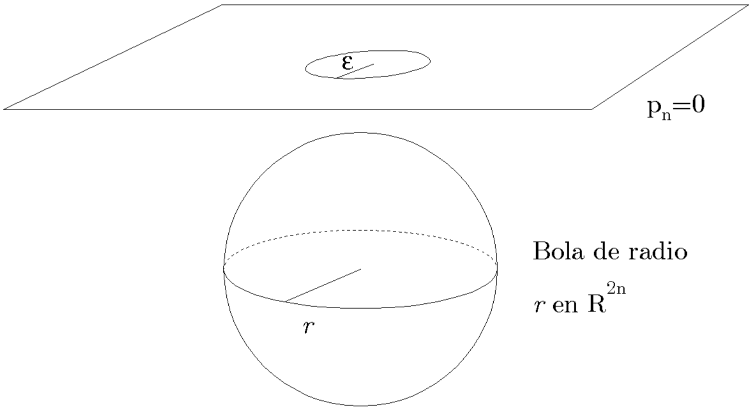


Fig. 2

En efecto, podemos aplastar y estirar la bola en la dirección de un eje, por ejemplo el p_n, hasta que esté contenida en un cilindro de base el disco de radio $\varepsilon/2$ en el espacio de coordenadas $(q^1, \ldots, q^n, p_1, \ldots, p_{n-1})$. Entonces el cilindro se pasa por el agujero y la bola se infla de nuevo. Sin embargo, como probó Gromov, esto no es posible si en la operación anterior usamos transformaciones simplécticas.

Así, aunque el Nuevo Testamento afirme que

> *Más fácil es que un camello pase por el ojo de una aguja que el que un rico entre en el Reino de Dios (Mt 19:24; Mr 10:25; Lu 18:25)*

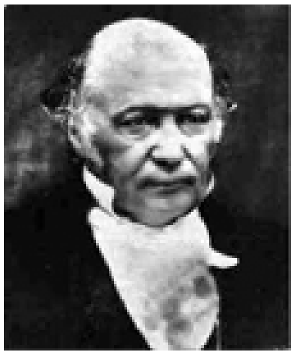
si *Dios* vive en un mundo simpléctico, el paso de un camello simpléctico por el ojo de una aguja es imposible. Dejamos a *Dios* que pruebe que la entrada de un rico en su Reino también lo es.

Detrás de los resultados anteriores se esconde un teorema de rigidez del grupo de los difeomorfismos simplécticos (demostrado, como indicábamos anteriormente, por Gromov) y la noción de *capacidad simpléctica*. La idea central es que, a diferencia del caso de los difeomorfismos que preservan el volumen, los difeomorfismos simplécticos no nos permiten "adelgazar" un conjunto dado en varias direcciones al mismo tiempo. Los conjuntos exhiben rigideces en su estructura cuando son distorsionados con difeomorfismos simplécticos. Se han inventado diversas maneras de medir los diámetros mínimos de un conjunto dado cuando se le aplican difeomorfismos simplécticos y estas "medidas" se denominan capacidades simplécticas. Las capacidades simplécticas son, por tanto, una forma de medir la "anchura simpléctica" de un conjunto.

4. Geometría Simpléctica y Mecánica Hamiltoniana

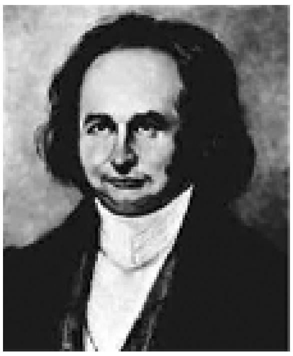
Teniendo en cuenta sus orígenes, no hay que perder de vista el papel que ha desempeñado la Geometría Simpléctica en la Física y, concretamente, en la Mecánica. Más específicamente, en la Mecánica Hamiltoniana.

Como indicamos en la Sección 1, podríamos decir que la Geometría Simpléctica fue inventada por Lagrange como una técnica analítica gracias a la cual se podía simplificar la escritura de las ecuaciones de movimiento planetarias. Estas técnicas fueron desarrolladas y ampliadas por Hamilton, que mostró que los descubrimientos de Lagrange se aplican a la Mecánica en su conjunto. La colección de ideas y de procedimientos de cálculo que han resultado es conocida bajo el nombre de *Mecánica Hamiltoniana*. Esta teoría fue retomada y refinada por Jacobi, Liouville y Poisson, entre otros autores.



W.R. Hamilton, 1805-65

El objetivo de la mecánica hamiltoniana es el estudio de la dinámica de partículas, esto es, el estudio del movimiento de una partícula (objeto) sometida a diversas fuerzas. Para determinar la trayectoria que un objeto de este tipo va a seguir, es preciso conocer no sólo su posición inicial sino que también su velocidad (momento) inicial. Esto implica que el espacio donde se desarrolla la dinámica (*el espacio de fases*) debe ser de dimensión par. Más precisamente, en este espacio podemos fijar sistemas de $2n$ coordenadas $(q^1, \ldots, q^n, p_1, \ldots, p_n)$, donde las n primeras coordenadas sirven para determinar la posición o configuración de la partícula y las n últimas sirven para determinar su velocidad (momento).

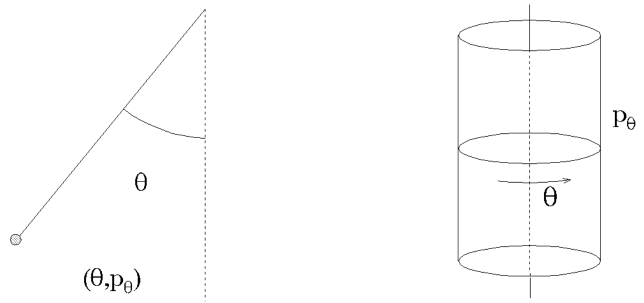


K.G.J. Jacobi, 1804-51

Para fijar las ideas pensemos en un ejemplo sencillo: *el péndulo plano* (véase Figura 3). En este caso la posición está determinada en todo instante de tiempo por el ángulo θ que forma el péndulo con la vertical. Por otra parte, el momento angular asociado p_θ puede variar en toda la recta real. Así el espacio de fases es el cilindro circular $S^1 \times \mathbb{R}$. Por tanto, conocidas la posición y momento inicial de una partícula (q_0^i, p_i^0) uno puede determinar la posición y el momento

$(q^i(t), p_i(t))$ en cualquier instante de tiempo t. En otras palabras, tenemos una curva en el espacio de fases dada por

$$\phi_{(q_0^i, p_i^0)} : t \longrightarrow \phi_{(q_0^i, p_i^0)}(t) = (q^i(t), p_i(t)).$$



Péndulo plano

Espacio de fases: Cilindro circular $S^1 \times R$

Fig. 3

Para calcular explícitamente esta curva debemos integrar las *ecuaciones de Hamilton*

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}.$$

Aquí, H denota *la energía total del sistema.*

Ahora, la pregunta es obvia ¿Qué relación existe entre las ecuaciones de Hamilton y la Geometría Simpléctica (la geometría de las áreas orientadas)?

Para responder esta cuestión consideremos una superficie parametrizada Ω en $\mathbb{R}^{2n}$

$$u : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{2n}, \quad \Omega = u(D)$$

con D la bola abierta en $\mathbb{R}^2$ de centro el origen y radio la unidad. Entonces, si queremos calcular el área de Ω, $A(\Omega)$, proyectamos Ω sobre cada uno de los factores $\mathbb{R}^2$ de $\mathbb{R}^{2n}$ y sumamos el área de cada una de las superficies resultantes en cada uno de los factores, esto es,

$$A(\Omega) = \sum_{i=1}^{n} \int_D \frac{\partial(q^i, p_i)}{\partial(x, y)} dxdy.$$

Ahora, usando el teorema de cambio de variable resulta que

$$A(\Omega) = \int_\Omega dq^1 \wedge dp_1 + \ldots + dq^n \wedge dp_n.$$

Por tanto, la densidad que nos define el área en cualquier superficie en $\mathbb{R}^{2n}$ es la 2-forma simpléctica canónica

$$dq^1 \wedge dp_1 + \ldots + dq^n \wedge dp_n.$$

Por otra parte, usando las ecuaciones de Hamilton, uno puede calcular la evolución temporal de la densidad a lo largo de las soluciones de las ecuaciones. En efecto,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\sum_{i=1}^n dq^i \wedge dp_i) &= \sum_{i=1}^n [d(\frac{dq^i}{dt}) \wedge dp_i + dq^i \wedge d(\frac{dp_i}{dt})] \\ &= \sum_{i=1}^n [d(\frac{\partial H}{\partial p_i}) \wedge dp_i - dq^i \wedge d(\frac{\partial H}{\partial qi})] = 0.\end{aligned}$$

En consecuencia, la densidad de área permanece constante a lo largo de las soluciones de las ecuaciones de Hamilton. Así, hemos dado la siguiente respuesta a la cuestión planteada anteriormente:

> *El espacio de fases de la dinámica de partículas es una variedad simpléctica y la dinámica correspondiente es una transformación simpléctica dependiente del tiempo.*

S-D Poisson, 1781-1840

Este hecho tiene consecuencia importantes y permite usar las estructuras simplécticas con diferentes fines en Mecánica. Por ejemplo, pueden usarse de un modo eficaz para generar *simetrías* (de traslación, de rotación, internas, ...) de sistemas físicos y *cantidades* (momento, energía, momento angular, ...) *que son conservadas con el curso del tiempo.* Tales *leyes de conservación* son muy útiles en el análisis general del comportamiento de sistemas, donde a menudo es imposible obtener resultados cuantitativos exactos. Los métodos simplécticos son también cruciales para el estudio de problemas de estabilidad y muchas veces mejoran las posibilidades de modelizar y prever el comportamiento de sistemas dinámicos complicados.

Por otra parte, en algunas ocasiones, el cálculo explícito de las trayectorias de un sistema mecánico puede ser una tarea altamente complicada. El problema matemático consiste en resolver un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden. Sin embargo, bajo ciertas condiciones es posible reducir el mismo y obtener un sistema más simple. Las soluciones del sistema reducido nos proporcionan más información sobre las soluciones del sistema original. En estos *procedimientos de reducción* las estructuras simplécticas juegan un papel importante.

J Liouville, 1809-82

Una bella y curiosa aplicación de la Geometría Simpléctica, usando una combinación de muchas de las ideas anteriores, es la cuestión de por qué un gato aterriza con las patas cuando se le tira desde una cierta altura y de espaldas. Este problema será examinado en la siguiente sección.

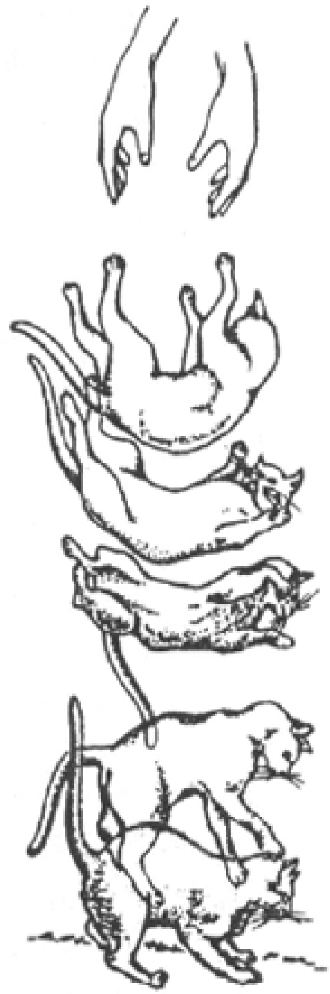
5. Geometría Simpléctica y las siete vidas de una gata

Una gata cayendo de espaldas se endereza para caer de pie.

Procedamos en primer lugar a la descripción real del problema. La cuestión es que la gata elige una estrategia de cambios que le permiten producir la rotación deseada de 180^o alrededor del eje de su espina dorsal. Entendemos que dos objetos en el espacio tridimensional tienen la misma *forma* si uno puede ser superpuesto sobre el otro mediante una combinación de traslaciones y rotaciones. Así una forma es una clase de equivalencia de objetos situados en el espacio y el *espacio de formas* es aquel constituido por todas las formas posibles de la gata. Es obvio que existe una familia de objetos de dimensión 6 que realizan una misma forma. Tres de estas dimensiones son aportadas por las rotaciones y las tres restantes por las traslaciones. *El espacio de configuraciones físicas de la gata* es el conjunto de todas las posibles realizaciones de todas las posibles formas que la gata puede tomar. Los puntos de este espacio son las *formas localizadas.* La aplicación que lleva un objeto a su forma sin tener en cuenta su localización y orientación se denomina *proyección.* Esta aplicación hace disminuir la dimensión en 6 unidades. En el problema de la gata podemos ignorar las traslaciones teniendo en cuenta las siguientes consideraciones: (i) no hay nada que la gata pueda hacer para influir en el movimiento de su centro de masas y (ii) elegimos un sistema de referencia tal que el origen sea el centro de masas de la gata. Por tanto, bajo la anterior hipótesis, la aplicación proyección reduce en 3 unidades la dimensión.

Ya que la forma inicial y final de la gata son prácticamente la misma, la curva de formas que la gata elige es cerrada. Así, nos podemos plantear la siguiente cuestión:

¿Cómo da lugar esta curva de formas a un movimiento real de la gata en el espacio, es decir, a una curva en el espacio de configuraciones?.



El movimiento real de la gata está determinado por tres condiciones:

1) La aplicación proyección lleva el movimiento real a la curva de formas dada.
2) El movimiento real empieza en la configuración dada, esto es, de espaldas.
3) El momento angular para la curva real es cero en cada instante de tiempo.

La tercera condición es la más importante y supone una restricción lineal en las velocidades. De hecho, la anulación del momento angular en cada forma localizada define un subespacio lineal del espacio tangente al espacio de configuraciones en dicha forma. Este subespacio se denomina *el espacio horizontal* en la forma localizada. El espacio horizontal varía con la forma localizada y, además, es perpendicular al espacio de rotaciones asociado a la forma. En consecuencia, la condición 3 es equivalente a exigir que el vector velocidad (tangente) de la curva real que sigue la gata sea horizontal en cada instante de tiempo, es decir, perpendicular al espacio de rotaciones.

Por otra parte, como indicábamos antes, la curva de formas que la gata elige es cerrada, esto es, un lazo. Por tanto, los puntos inicial y final de la curva real representan la misma forma y deben estar relacionados por una rotación. En el caso de la gata, es de 180^o alrededor del eje inicial de su espina dorsal y es lo que se denomina *la holonomía del problema.* Finalmente, no debemos olvidar que la gata intentará realizar su ejercicio con la mayor eficiencia posible. Esta eficiencia debe corresponder a alguna forma de longitud de la curva o alguna forma cuadrática en las velocidades. En consecuencia, el problema real es un problema de control óptimo: *de entre todos los lazos de formas (con una holonomía dada) hay que encontrar el más corto.*

A continuación procedemos, sin entrar (por razones obvias) en excesivos detalles, a la descripción matemática del problema. Primeramente, conviene señalar que el modelo matemático que presentaremos aquí es general y puede ser aplicado al estudio de otros sistemas mecánicos.

El espacio de formas y configuraciones, el grupo G (de las rotaciones) actuando sobre el espacio de las configuraciones, la aplicación proyección del espacio de configuraciones sobre el espacio de las formas y la familia de espacios horizontales en el espacio de configuraciones es lo que en Matemáticas corresponde con *un fibrado principal con grupo de estructura G y con una conexión dada.*

Decimos que una configuración descansa sobre una forma dada cuando se proyecta sobre ella. Al conjunto de todas las configuraciones que descansan sobre un punto dado en el espacio de formas se le llama *la fibra* sobre ese punto. A las direcciones a lo largo de la fibra se les denominan *verticales*, en contraposición a *las direcciones horizontales.*

En este contexto la holonomía no es más que un elemento $g \in G$ y la regla descrita anteriormente para obtener una curva en el espacio de configuraciones, a partir de una curva en el espacio de formas, basada en las condiciones $1, 2, 3$ es exactamente la operación de *elevación horizontal* de una curva del espacio base al espacio total.

Por otra parte, para medir la eficiencia de la que hablamos antes, debemos disponer de una *métrica (producto escalar)* en el espacio de formas o, en otras palabras, de una forma de medir longitudes de curvas en el espacio de formas.

Ahora con todos estos ingredientes podemos plantear el problema matemático como sigue:

> *Encontrar una curva horizontal c en el espacio de configuraciones cuya holonomía sea $g \in G$ y tal que la curva base s tenga longitud mínima.*

Lo que se demuestra es que en el caso de la gata el problema siempre tiene solución. Esto justifica el hecho de que la gata aterrice con las patas.

Tras la descripción real del problema y su modelización matemática, una cuestión natural surge de inmediato:

¿Cual es la conexión de todo esto con la Geometría Simpléctica?

La respuesta a tal cuestión está basada en el siguiente resultado. En relación con el problema matemático planteado anteriormente, se prueba que la curva c es extremal (solución) si y sólo si la curva base s satisface las así llamadas *ecuaciones de Wong.* Entonces, el punto clave reside en que las ecuaciones de Wong son ecuaciones de Hamilton para un cierto hamiltoniano !

6. Geometría Simpléctica y Mecánica Cuántica

Uno de los grandes logros del siglo XX fue la descripción de la mayor parte de los sistemas físicos usando la Mecánica Cuántica.

En esta sección pretendemos mostrar algunos puntos de conexión entre la Geometría Simpléctica y la Mecánica Cuántica. Dada la complejidad del tema y por razones obvias, el tratamiento que presentamos aquí está muy lejos de ser exhaustivo. Pero al menos intentaremos mostrar, sin entrar en detalles, cómo la Geometría Simpléctica está presente en diversos aspectos relacionados con la Mecánica Cuántica.

Una de las grandes diferencias entre la Mecánica Clásica y Cuántica es que la primera de ellas es esencialmente determinista, mientras que la segunda es esencialmente probabilística. Hay limitaciones inevitables a la precisión para que ciertos pares de cantidades puedan ser medidas simultáneamente: es el "principio de incertidumbre de Heisenberg".

Al contrario de lo que sucede en Mecánica Clásica (Hamiltoniana), el espacio de los estados cuánticos no es de dimensión finita. Se trata de un espacio de Hilbert. A pesar de esto, algunos restos simplécticos persisten. En primer lugar, no hay principio de incertidumbre para dos cantidades que no están apareadas simplécticamente. En segundo lugar, la Geometría Simpléctica está íntimamente implicada en la transición de la descripción clásica de un sistema físico y su versión cuántica, es decir, en el proceso de cuantificación. Profundicemos algo más en este proceso. Ya que todo sistema físico debe quedar dentro de la Mecánica Cuántica, es lógico suponer que la descripción cuántica de un sistema debe tener un único límite clásico. Sin embargo, en la realidad esto no es así. A menudo, los físicos suelen construir una formulación cuántica del sistema a partir de su límite clásico. Es el proceso de cuantificar el problema clásico. Hay diversas formas de hacer esto ya que es imposible encontrar un único esquema de cuantificación que se aplique a todos los sistemas clásicos. Uno de estos procesos donde la Geometría Simpléctica juega un papel importante es la cuantificación geométrica. Se trata de usar la estructura simpléctica del espacio de fases para construir el espacio de Hilbert cuántico. De forma más precisa lo que se hace es polarizar el espacio de fases, es decir, realizar una separación intrínseca de las posiciones y los momentos. Una vez que el espacio de fases está polarizado, se puede crear una teoría cuántica del sistema.

La cuantificación geométrica (como cualquiera de los procesos de cuantificación) no es un procedimiento totalmente perfecto y conlleva una serie de problemas. Así, por ejemplo, la libertad de la que disponemos para elegir la polarización se refleja en que sistemas cuánticos diferentes pueden tener el mismo límite clásico. En el otro extremo, existen variedades simplécticas que no pueden ser polarizadas.

Un dominio de la Física donde la cuantificación podría jugar un papel importante es en la relatividad general. La Física Clásica del campo de gravitación es bien entendida en términos de la teoría de Einstein. Pero de todas las interacciones fundamentales de la naturaleza la gravitación es la única que no tiene una descripción cuántica consistente. El estudio de la gravitación cuántica ha implicado la construcción de diferentes modelos del Universo y de su campo de gravitación. La cuantificación geométrica juega un papel importante en el estudio de estos modelos y en las experiencias realizadas tomando como base los mismos. Algunas de estas experiencias han sido usadas para predecir la evolución del Universo e incluso su posible fin!

7. Geometría Simpléctica y otros tópicos de la Ciencia

En esta última sección del trabajo me gustaría decir algunas palabras acerca de la Geometría Simpléctica y su aplicación en otras áreas, no sólo en Geometría Diferencial o en Mecánica Hamiltoniana y Cuántica.

Desde el punto de vista matemático, podemos decir que la Geometría Simpléctica no sólo es interesante por si misma, como disciplina propia. De hecho, en los últimos años las técnicas simplécticas han sido aplicadas a diversas ramas de las Matemáticas con gran éxito. Algunas de estas ramas son la teoría de representaciones, la teoría de números, la teoría de nudos, la teoría de catástrofes,...

Bastante más fuerte que todo esto es la filosofía de la simplectificación evocada por Arnold. El comenta que hay hechos que indican que muchas de las ideas y construcciones matemáticas ordinarias no solamente tienen sus análogos en el dominio de la Geometría Simpléctica, sino que además encuentran sus fundamentos en ella. En su opinión esto sugiere la posibilidad de reformular completamente una gran parte de las Matemáticas en términos simplécticos. Es lo que él llama "el proceso de simplectificación" de las Matemáticas.

Por otro lado, aparte del papel esencial que la Geometría Simpléctica juega en Mecánica Clásica Hamiltoniana y Mecánica Cuántica existen otros tópicos de la Física y de la Ciencia, en general, donde las técnicas simplécticas son ampliamente aplicadas. Por citar algunos de ellos podemos indicar: Mecánica no holónoma, teoría de integrabilidad, caos hamiltoniano, óptica, termodinámica, control y dinámica de satélites,...

En definitiva podemos atrevernos a decir que la Geometría Simpléctica es algo más que una teoría matemática y que ella ilumina una parte del cielo de la Ciencia.

Agradecimientos: Me gustaría agradecer a los profesores R. Ibáñez y M. Macho por haberme brindado la oportunidad de participar en el Ciclo de Conferencias "Un Paseo por la Geometría 2000/2001". Asimismo, quiero aprovechar esta oportunidad para expresar mi gratitud a los mencionados profesores por el buen trato que he recibido por parte de ellos en las diferentes ocasiones en que he visitado el Departamento de Matemáticas de la UPV. Finalmente, quiero dar las gracias a los profesores A. Montesdeoca y E. Padrón, por su ayuda a la hora de insertar las imágenes y figuras en el texto.

Bibliografía

Recogemos en la última parte del trabajo algunas referencias que han sido de gran utilidad en la elaboración del mismo.

[1] V.I. Arnold, *First steps in symplectic topology,* Russian Math. Surveys 41, 6 (1986), 1-21.

[2] M. J. Gotay, J.A. Isenberg, *La symplectification de la Science*, Gazette des Mathematiciens 54 (1992), 59-79.

[3] A. Ibort, *¿Pueden los camellos pasar por el ojo de una aguja? y otras historias*

simplécticas, La Gaceta de la RSME 3 (2) (2000), 185-197.

[4] J.E. Marsden, *Lectures in Mechanics*, London Math. Soc., Lecture Notes Ser. 174, Cambridge Univ. Press, 1992.

[5] D. McDuff, *Symplectic structures. A new approach to Geometry* , Notice Am. Math. Soc. 45 (1998), 952-960.

[6] R. Montgomery, *Las siete vidas de un gato (holonomía)*, Fotografiando las Matemáticas, Carrogio S. A. de Ediciones, ISBN 84-7254-800-7 (2000), 66-71.

[7] I. Stewart, *The symplectic camel*, Nature, 329 (1987), 17-18.