PAPIROFLEXIA Y MATEMÁTICAS

INTRODUCCIÓN A LA PAPIROFLEXIA. HISTORIA.

Papiroflexia es una palabra de origen latino que deriva de *papiro* (papel) y *flectere* (doblar) que significa doblar el papel y por extensión darle la figura de determinados seres u objetos. Por lo tanto el término define tanto el objeto resultante como la acción de doblar.

El término papiroflexia hace ya tiempo que pertenece a la lengua española y que aparece en el diccionario de la Real Academia Española, que recoge la definición: "arte y habilidad de dar a un trozo de papel, doblándolo convenientemente, la figura de determinados seres u objetos.

La papiroflexia u origami (término original de la disciplina) tiene una historia milenaria que se funde con la tradición y la cultura japonesa. Fue en China donde se introdujo el papel en los primeros siglos de la era cristiana y llega a Japón en el siglo VI d.C. Y con el papel hizo su aparición el origami: ¿arte? ¿ciencia? ¿entretenimiento?... podríamos decir que la papiroflexia nos permite una conexión entre el cerebro, la mano y el ojo, y de ahí su importancia en el aprendizaje de las matemáticas como estimulante del cerebro.

En su primera época el papel era utilizado exclusivamente por las clases altas, pues eran las únicas que tenían acceso a él. En los siglos XIV y XV el papel ya era mas accesible, pero la generalización de la papiroflexia no se dio hasta el periodo Tokugawa (1603-1867). Es en esta época donde surge la figura de la grulla, la más popular en Japón como aquí lo es la pajarita.

En Europa el conocimiento del papel se difundió relativamente tarde: los árabes lo introdujeron en España donde se empezó a fabricar en el siglo X.

La tradición del papel doblado tuvo su impulso en Europa gracias al filósofo español Miguel de Unamuno (1864-1936) después de su visita al pabellón de Japón en la Exposición Universal de Paris de 1889. A él debemos muchos de los modelos de pajaritas conocidos en la actualidad y es de hecho considerado el padre de la papiroflexia en Europa

Símbolos y código:

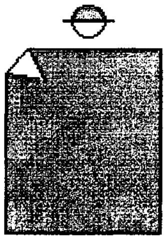
El lenguaje gráfico que se emplea en papiroflexia es relativamente sencillo. Los esquemas deben ser claros, a cada símbolo le corresponde un pliegue concreto y definido o un grupo de pliegues. Es importante subrayar el hecho de que lo mismo que las matemáticas utilizan unos símbolos determinados de forma universal que les facilitan el entendimiento, independientemente del país, lengua o raza de origen, el origami tiene la misma cualidad, por lo que se pueden considerar ambas ciencias como favorecedoras del entendimiento entre los pueblos.

Akira Yoshizawa creó un código internacional para representar los dobleces y las acciones a realizar en el correspondiente diagrama.

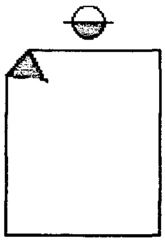
Símbolos

Posición de papel.

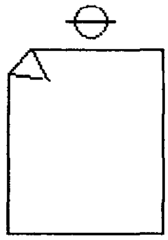
Color arriba:



Color abajo:



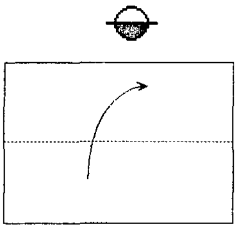
Papel de un solo color:

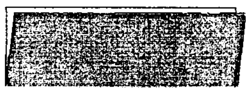


Pliegues y líneas básicas.

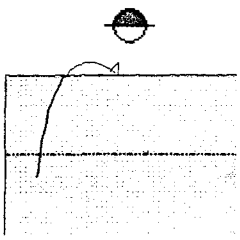
Todos los pliegues de un diagrama tienen una representación gráfica compuesta por un tipo de línea y una flecha asociada, para que bien con una o bien con otra sepamos como debemos doblar.

Pliegue valle. Consiste en doblar hacia delante, llevando un lado del papel sobre el otro.

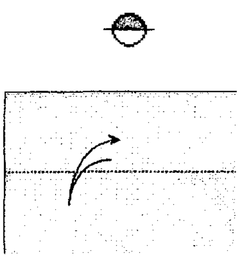


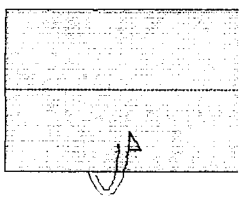


Pliegue Monte: Consiste en doblar hacia atrás, llevando un lado del papel sobre el otro.

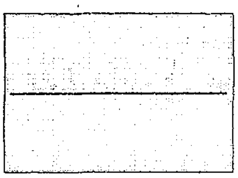


Plegar y desplegar:. Consiste en doblar y a continuación desdoblar, bien en valle, o bien en monte. El resultado es que quede una marca en el papel.

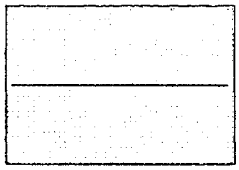




El resultado obtenido sería:



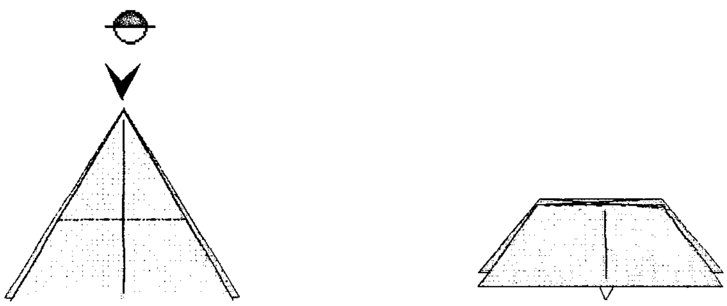
Marca: Son el resultado de plegar y desplegar.



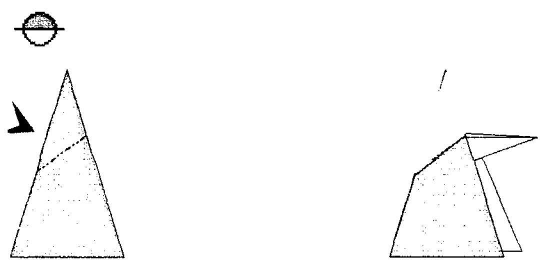
Rayos X: este tipo de línea nos indica que existen pliegues en alguna capa de nuestro modelo que no podemos ver, o bien marcamos alguna línea de borde de la figura que no podemos ver.

Pliegues escalonados: consiste en un pliegue valle seguido por otro pliegue monte. Su flecha asociada es quebrada y apunta en la dirección del valle.

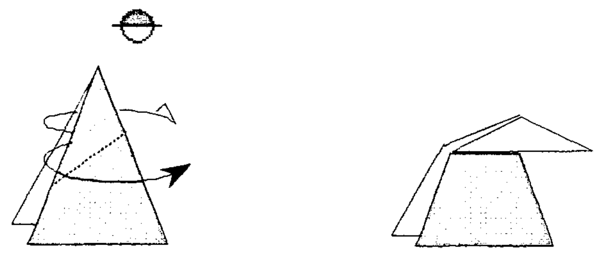
Pliegue hundido. Es una manera de invertir una punta hacia dentro, de forma que al finalizar el hundido la figura quede totalmente plana.



Pliegue hendido: es similar al anterior y se realiza para cambiar la dirección de las puntas doblando hacia dentro.



Pliegue vuelto: permite cambiar la dirección de una punta doblando hacia el exterior.



Pliegue oreja de conejo: es un sistema para hacer más fina una punta a la vez que la cambiamos de dirección.

MATEMÁTICAS Y PAPIROFLEXIA.

En el origami puede hallarse un componente **geométrico** si se considera el modo exacto y riguroso en el que se deben doblar las formas. Ya el educador alemán Friedrich Froebel (1782-1852), fundador del sistema kindergarten, se dio cuenta en Europa del arma de la papiroflexia para familiarizarse y comprender las formas geométricas. Ha pasado a la historia la construcción del cuadrado de Froebel. Obras completas de Friedrich Froebel.Tamagawa University Press. 1981.

En el campo de la aritmética, algunas personas afirman que el método de enseñar en la escuela primaria está equivocado. En la actualidad la adición y la sustracción se enseñan antes que la multiplicación y la división, sin embargo en la vida cotidiana al tratar de distribuir cosas entre hermanos y amigos en la escuela, los niños entran en contacto con la división antes que con el resto de los procesos aritméticos. Sin querer discutir la validez de esta teoría, lo que si es cierto es que en origami el plegado cuidadoso para alinear bordes y esquinas equivale a dividir ángulos en 2, 4, 6, 8... partes iguales. Las divisiones en cantidades impares como 3, 5 y 7 partes iguales requiere de la aplicación de principios matemáticos. Como ejemplo de ello podemos ver el Teorema de Haga. (Kazuo Haga) y la expansión del teorema de Haga (Kohji y Mitsue Fushimi).

Una forma fácil de darnos cuenta de la relación entre las matemáticas y la papiroflexia es desplegar un modelo y observar el cuadrado de papel del que partimos. Las marcas de los pliegues constituyen un grafo que cumple unas ciertas propiedades y su relación con los conceptos matemáticos es evidente.

Podemos hacer una división a grosso modo en tres apartados que nos relacionan problemas matemáticos con origami o bien origami con matemáticas. "tanto monta, monta tanto..."

I.- Origami Modular: representación de poliedros y figuras geométricas

II.- Axiomas de constructibilidad: teoría de puntos constructibles con origami

Origami Modular

La papiroflexia modular consiste en hacer figuras utilizando varios papeles que darán lugar a piezas individuales que llamaremos módulos. Cada uno de estos módulos tendrá solapas y bolsillos, que se usarán para ensamblarlos entre si. El plegado de cada módulo suele ser bastante sencillo y los poliedros suelen ser los modelos elegidos para este tipo de modalidad.

La papiroflexia modular tiene un valor estético y artístico que resulta evidente a primera vista y un interés matemático que podemos concretar en los siguientes puntos:

- El plegado y ensamblaje de los módulos permite experimentar de forma sencilla con los conceptos de cara, vértice, arista, índice, y con las propiedades de regularidad, simetría, grado de un vértice, característica de Euler-Poincaré, etc.
- Las figuras geométricas realizadas con papel nos dan la representación fisica de entes abstractos y en este sentido mejora la presentación que de estos objetos se puede lograr mediante un programa de ordenador al poder "palparlo" y manipularlo a nuestro gusto.

Poliedros.

Un poliedro se puede definir como un conjunto conexo de $\mathbb{R}^3$ formado por un número finito de polígonos planos que se juntan de manera que cada lado de un polígono pertenece exactamente a otro polígono del poliedro y de manera que los

polígonos que concurran en cada vértice forman un circuito simple. Los polígonos se llaman caras y sus lados aristas. Es decir un poliedro es una superficie cerrada no diferenciable (vértices y aristas) que divide al espacio en dos partes, una no acotada y otra acotada que llamamos interior.

Los poliedros mas importantes desde el punto de vista matemático son los poliedros convexos, de modo que podemos definirlo mediante un sistema de desigualdades:

$$a_i x + b_i y + c_i z \leq d_i \quad \forall i = 1,\dots,C \qquad \text{siendo C el número de caras.}$$

Los poliedros mas famosos son los llamados platónicos que no son mas que los cinco poliedros regulares que existen: tetraedro, cubo, octaedro, icosaedro y dodecaedro. La demostración de que sólo existen éstos se atribuye a Teeteto (425-379 a.C.) de la escuela de Platón. La demostración mas elegante de este resultado se hace mediante la fórmula de Euler.

Platón en su libro Timeo (ap. 55-56) atribuye a cada uno de estos sólidos uno de los 4 elementos, en el pasaje en el que describe la creación del universo. El tetraedro es el fuego, el octaedro, el aire, el cubo, la tierra y el icosaedro las moléculas de agua. Concluye Platón que el Creador utilizó el dodecaedro para formar el universo.

Los cinco poliedros regulares, cuyas caras son todas de la misma forma y tamaño, pueden parecer simples, pero, en realidad son muy dificiles de plegar, especialmente utilizando hojas únicas de papel cuadrado. En especial el dodecaedro regular, que está basado en el pentágono regular, es sumamente complicado. Kazuo Haga, profesor en la universidad de Tsukuba, se abocó a este problema y realizó una labor excelente para superar estas dificultades. El tetraedro regular, el hexaedro y el octaedro son relativamente fáciles. No obstante, el método del profesor Haga es el único que se ha desarrollado hasta la fecha, para plegar los más difíciles, como el icosaedro y el dodecaedro a partir de una única hoja de papel.

La filosofía del profesor Haga sobre la construcción de los sólidos platónicos, se puede resumir en cinco puntos:

1. La elaboración de figuras geométricas con hojas únicas de papel sin adornos
2. Utilizar únicamente las manos; no se permite ninguna clase de herramientas.
3. No se permite cortar ni rasgar; debe ser posible desdoblar el papel hasta su forma original.
4. Las figuras resultantes deben ser firmes y estables.
5. La figura resultante debe ser elegante y bien acabada.

Módulo Sonobè

El módulo Sonobè puede considerarse el punto de origen de la papiroflexia modular. Su fundador, Mitsunobu Sonobè lo denominaba "caja de color", aunque hoy día el término empleado no es otro que módulo de Sonobè.

Seis módulos Sonobè nos permiten la construcción del cubo de múltiples maneras sin más que introducir pequeñas variaciones en la construcción del módulo. Es importante en la realización de los módulos tener en cuenta que todas son de la misma forma para poder realizar el ensamblaje, lo que nos lleva a una reflexión sobre la simetría especular y abre un campo interesante sobre las figuras que podrían construirse en el caso de utilizar módulos simétricos en la construcción de un mismo cubo.

La utilización de módulos de mas de tres colores en la elaboración de este cubo la investigó Masayuki Hayashi. Este diseño se ha llamado desde hace mucho tiempo diábolo, el nombre de una especie de peonza rotativa accionada mediante una cuerda fijada en los extremos de dos palillos. La visualización del cubo obtenida justifica de forma inmediata este nombre, "vale mas una imagen que cien palabras".

Para la construcción del cubo con dos colores existen diversas soluciones. Nos podemos fijar en la que hace uso de los diferentes colores del anverso y reverso del papel. El método de ensamblado varía y aunque la ubicación de los dobleces es idéntica al caso anterior se producen cambios en la utilización de los pliegues elevados o hundidos.

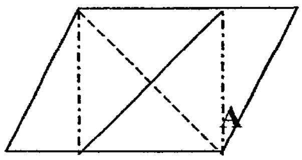
Con estos mismos módulos Sonobè es posible construir esferas de mas unidades. Resulta relativamente sencilla la realización de las que utilizan 12 y 30 módulos. Un problema entretenido es construir la esfera multimodular de 30 unidades a partir de tres colores de papel y disponer el montaje de forma que ninguna punta (pirámide) adyacente sea del mismo color.

Utilizando el método de ensayo y error el grupo de Kasahara, construyó las versiones de 90 y 120 unidades y basándose en las ideas de Tokushige Terada sobre la relación entre poliedros y esferas de esta clase se expandió el límite superior a 300 unidades, es decir diez veces el número inicial.

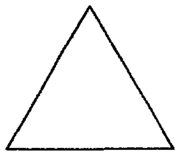
Una reflexión sobre los poliedros, lleva a la conclusión de que se necesita una unidad secundaria, cuya base estaría limitada a un hexágono regular, aunque las últimas investigaciones apuntan a la posibilidad de tomar como base los octógonos y decágonos regulares.

La clasificación de los módulos se puede concretar en el siguiente esquema:

Módulo primario: formado por tres módulos. Su ensamblado lleva a una pirámide con base triángulo equilátero.

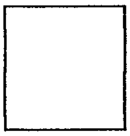


h x 3

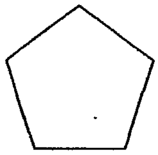


h

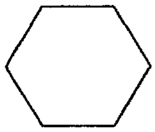
Módulo secundario: se pueden concebir tres clases de módulos secundarios:



h



h



h

* Ax4

o Base cuadrado. Número de pirámides 4

* Ax5

o Base pentágono regular. Número de pirámides 5

* Ax6

o Base hexágono regular. Número de pirámides 6

En estos tres módulos la base está abierta; no obstante cuando se ensambla la totalidad queda cerrada.

Módulo terciario: un grupo de 6 unidades Ax6 cada una con seis pirámides se alinean sobre sus bases en un plano. A partir de esta disposición, se agregan otras unidades secundarias poligonales para convertirse en unidades terciarias.

Ax32 da como base un octógono regular y número de pirámides 24.

Ax40 da como base un decágono regular y número de pirámides 30.

A partir de estas unidades terciarias el profesor Masao Matsuzaki del Ikeda Institute de la Osaka University of Education, y con cooperación de alguno de sus estudiantes, incrementó el tamaño de la esfera a 900 unidades. Se requirió una semana completa para concluir la esfera. Si el tamaño de esta fuera el del sol, Júpiter sería aproximadamente del tamaño de uno de los cubos; y la tierra no sería más grande que uno de los agujeros visibles de la parte interior.

Los poliedros o esferas sólidas, agrupan a los cinco poliedros regulares, en los cuales todas las formas son del mismo tamaño y forma, y trece poliedros semiregulares, en los que las caras difieren de algún modo. Estas figuras pueden construirse utilizando el sistema multimodular y las unidades secundarias y terciarias.

ESCULTURA DE PAPEL

Por último hacemos una somera reflexión sobre el amplio camino que abren las matemáticas y la papiroflexia en el mundo creativo. Ya que trabajar con formas geométricas y unidades resulta entretenido, debido a la gran variedad que presentan. Con la simple alteración de los métodos de ensamblado o de los pliegues se pueden elaborar trabajos muy impactantes.

Además, las unidades pueden utilizarse en algo más que en formas geométricas. Su sensación multidimensional característica produce efectos sumamente esculturales, lográndose bellas construcciones de indudable valor artístico.

CONSTRUCCIONES A REALIZAR

- **Cubo de Sonobè**. Con el módulo simplificado. Papel cuadrado. 6 módulos
- **Tetraedro**. Con dos módulos. Papel cuadrado
- **Rompecabezas de tetraedros**.
- **Octaedro**. Con cuatro módulos. Papel cuadrado
- **Anillo rotativo de tetraedros rómbicos**. Cuatro módulos. Din5.
- **Plegado de mapa**. Un módulo. Din4
- **Grulla tradicional**. Papel cuadrado.
- **Boca parlante**. Papel cuadrado.

REFERENCIAS

BRILL, David. *Brilliant Origami*. Ed. Japan Publications (2001).

KASAHARA, Kunihito; TAKAHAMA, Toshie. *Papiroflexia para Expertos*. Ed. EDAF (2000).

MACCHI, Pietro; SCABURRI, Paola. *Nuevos Objetos de Papiroflexia*. Ed. de Vecchi (1997).

MITCHELL, David. *Origami Matemáticos*. Ed. Replicação (2001).

MONTERO, Nemesio. *El Mundo de Papel*. Ed. Sever-Cuesta (1980).

PEÑA HENÁNDEZ, Jesús de la. *Matemáticas y Papiroflexia*. Ed. Asociación Española de Papiroflexia (2001).

ROYO PRIETO, José Ignacio, "Matemáticas y papiroflexia", en: www.pajarita.org.

www.aimsedu.org/Activities/origami/cube.pdf

www.mathworld.wolfram.com/Icosidodecahedron.